

Riešené príklady

Dôležité limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,718281..., \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^k = 1 \text{ pre každé reálne } k.$$

Príklad Nájdime $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie. Po dosadení do daného výrazu $x = 1$ dostávame “bez problémov”

$\frac{1^2 - 9}{1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{-8}{2} = -4$. Teda, ak je funkcia v bode spojitá a má v ňom limitu, potom táto limita je rovná hodnote funkcie v danom bode.

Príklad Nájdime $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie. Po dosadení $x = 3$ do danej funkcie dostávame $\frac{3^2 - 9}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{0}{0}$, čo je neurčitý výraz. Je

to niečo podobné ako vo funkcii $f(x) = \frac{x}{x}$. Táto funkcia nie je definovaná v bode $x = 0$ ale všade okrem tohoto bodu je rovná funkcii $g(x) = 1$ čo je spojitá funkcia. Podobne môžeme postupovať v našom prípade. Danú funkciu vyjadríme v tvare $\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$ a v okolí bodu $x = 3$ nahradíme

túto funkciu spojitou funkciou $\frac{(x+3)}{(x-2)}$. Potom $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = 6$.

Príklad Nájdime $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie. Funkciu pod limitou môžeme upraviť takto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 5 \frac{x}{x^2} + 6 \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 9 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}{1 - 5 \frac{1}{x} + 6 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1 - 9 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0},$$

pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Teda $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 1$.

Príklad Rozhodnime či funkcia $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} & \text{pre } x \neq 3, \\ 158 & \text{pre } x = 3 \end{cases}$ je spojitá v bode 3.

Riešenie. Z Príkladu 2 vieme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 6 \neq 158$, teda daná funkcia nie je spojitá v bode 3. Funkcia by bola spojitá v bode 3 keby jej funkčná hodnota v bode 3 bola 6 a nie 158.

Príklad Nájďme $\lim_{x \rightarrow 0} 7 \frac{\sin 5x}{x}$.

Riešenie.

Danú limitu si upravíme takto $\lim_{x \rightarrow 0} 7 \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7.5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$. Ak zavedieme substitúciu $u = 5x$, potom ak $x \rightarrow 0$, tak aj $u \rightarrow 0$ a danú limitu môžeme vyjadriť v tvare

$$\lim_{x \rightarrow 0} 7 \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7.5 \cdot \frac{\sin u}{u} = 7.5 \cdot 1 = 35.$$