

Príklad 5.1 Kus drôtu s dĺžkou a máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do tvaru štvorca a druhá do tvaru kruhu. Na ktorom mieste je potrebné urobiť rez, aby súčet obsahu štvorca a obsahu kruhu bol najmenší?

Riešenie. Ak si označíme veľkosť strany štvorca písmenom x a veľkosť polomeru kruhu r , tak pre obvod štvorca a kruhu dostávame $O_{\text{štvorca}} = 4x, O_{\text{kruhu}} = 2\pi r$. Pre plošný obsah štvorca a kruhu dostávame $P_{\text{štvorca}} = x^2, P_{\text{kruhu}} = \pi r^2$. Potom platí $a = 4x + 2\pi r$, $P = x^2 + \pi r^2$, kde P je plošný obsah útvaru pozostávajúceho z kruhu a štvorca. Dostávame $x = \frac{a - 2\pi r}{4}$ a po dosadení do P dostávame

$$P = \frac{(a - 2\pi r)^2}{16} + \pi r^2 \text{ čo je už iba funkcia jednej premennej a to polomeru kruhu. Teda môžeme}$$

$$\text{písať } P(r) = \frac{(a - 2\pi r)^2}{16} + \pi r^2. \text{ Pretože funkcia "má dobré vlastnosti" (je diferencovateľná)}$$

môže mať extrém v bode v ktorom je jej prvá derivácia rovná nule. Dostávame

$$P'(r) = \frac{2(a - 2\pi r)(-2\pi)}{16} + 2\pi r = 0. \text{ Riešením rovnice dostávame } r = \frac{a}{2\pi + 8}.$$

Po dosadení do výrazu $x = \frac{a - 2\pi r}{4}$ dostaneme $x = \frac{a}{\pi + 4}$. Pretože $P''(r) = P''\left(\frac{a}{2\pi + 8}\right) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0$ má funkcia

$$P(r) = \frac{(a - 2\pi r)^2}{16} + \pi r^2 \text{ v bode } r = \frac{a}{2\pi + 8} \text{ lokálne minimum. Pretože } P''(r) > 0 \text{ vypočítané}$$

rozмеры štvorca a kruhu udávajú riešenie danej úlohy, teda kus drôtu rozdelíme na časti $\frac{4a}{\pi + 4}$ a zvyšok.