

Rozdelenia pravdepodobnosti

Príklad Viacročným pozorovaním stavu hladiny veľkej rieky v určitej oblasti sa zistilo, že pravdepodobnosť jarných záplav tejto rieky je $1/12$. Určme: a) strednú hodnotu, disperziu a modus počtu záplav pre najbližších 40 rokov; b) pravdepodobnosť toho, že týchto záplav bude aspoň 5; c) graf distribučnej funkcie príslušnej náhodnej premennej.

Riešenie: Diskrétna náhodná premenná X v tomto príklade znamená počet jarných záplav a sleduje *binomické rozdelenie pravdepodobnosti* (opakované nezávislé pokusy), s parametrami $n = 40$, $p = 1/12$.

a) Pre výpočet *strednej hodnoty* a *disperzie* náhodnej premennej X použijeme vzťahy:

$$E(X) = n \cdot p, D(X) = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

Môžeme použiť aj MATLAB:

```
>> n=40;p=1/12;format rat;[E,D]=binostat(n,p)
```

```
E =  
10/3  
D =  
55/18
```

Pre určenie *najpravdepodobnejšieho počtu* jarných záplav použijeme MATLAB, pričom si ale nemusíme dať vypísať celú pravdepodobnostnú tabuľku, ale sa zorientujeme podľa indexu i a hodnoty maximálnej pravdepodobnosti m :

```
>> x=0:40;px=binopdf(x,n,p);[m,i]=max(px)
```

```
m =  
859/3758  
i =  
4
```

Takto dostaneme pre *najpravdepodobnejší počet (modus)* výsledok: $Mo(X) = 3$ (treba dať pozor na posun indexu).

b) *Funkcia pravdepodobnosti* je pre *binomické rozdelenie* definovaná vzťahom:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}, & \text{ak } x = 0, 1, \dots, n, \text{ kde } q = 1 - p. \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

Počítame *pravdepodobnosť*:

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4)$. Namiesto dosadzovania do vzorca opäť výhodne použijeme MATLAB:

```
>> format;1-sum(binopdf(0:4,n,p))
```

resp.:

```
>> 1-binocdf(4,n,p)
```

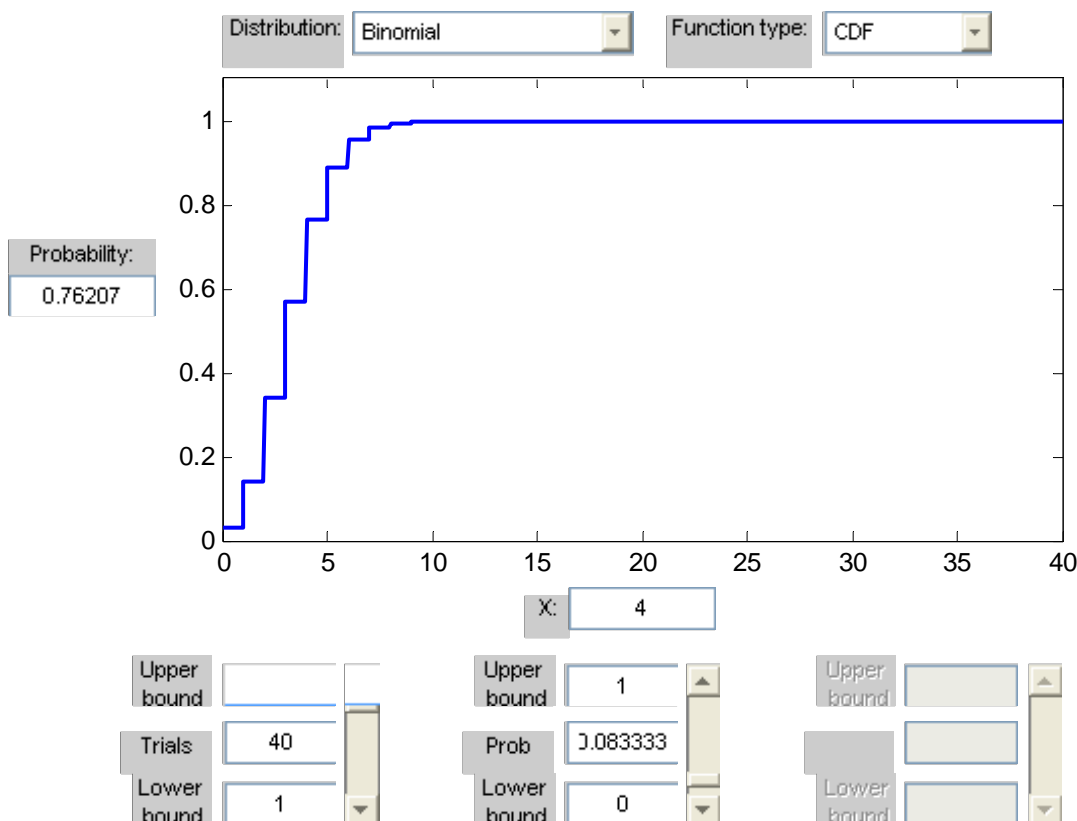
```
ans =  
0.2379
```

c) *Graf distribučnej funkcie*:

Môžeme opäť použiť MATLAB, a to pomocou *stairs* alebo odoslaním príkazu:

```
>> disttool
```

V grafickom okne si môžeme nastaviť potrebné parametre (Binomial, CDF, Trials, Prob). Nástroj *distool* slúži na grafické znázorňovanie distribučnej funkcie a hustoty štandardných rozdelení.



Príklad Zariadenie registrujúce v priemere 5 častíc kozmického žiarenia za 24 hodín bolo odstavené 8 hodín. Aká je pravdepodobnosť toho, že by počas tejto doby zaregistrovalo: a) aspoň jednu, ale nanajvýš 3 častice; b) aspoň 4 častice?

Riešenie: Diskrétna náhodná premenná X v tomto príklade znamená počet zaregistrovaných častíc počas odstávky 8 hodín a má *Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti* s parametrom λ .

Platí: $E(X) = \lambda = \frac{5 \cdot 8}{24} = \frac{5}{3}$. Jej funkcia pravdepodobnosti je definovaná vzťahom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, & \text{ak } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

a) Počítame *pravdepodobnosť*:

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3).$$

Na výpočet môžeme použiť MATLAB:

>> sum(poisspdf(1:3,5/3))

ans =
0.7229

b) Počítame *pravdepodobnosť*:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3).$$

```
>> 1-sum(poisspdf(0:3,5/3))
```

resp.:

```
>> 1-poisscdf(3,5/3)
```

```
ans =  
0.0883
```

Príklad Výrobné zariadenie má poruchu v priemere raz za 450 hodín. Doba bezporuchového chodu má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti.. Vypočítajte: a) pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu bude kratšia ako $t = 600, 650, 700$ hodín; b) takú hodnotu t , že pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu bude dlhšia ako t hodín, je $p = 0,85; 0,9; 0,95$.

Riešenie: Spojitá náhodná premenná X v tomto príklade znamená dobu bezporuchového chodu a má *exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti* s parametrom λ . Jej distribučná funkcia je daná

vzťahom
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$
 a pre jej strednú hodnotu platí, že sa rovná parametru λ .

Dostávame teda: $E(X) = \lambda = 450$.

a) Máme vypočítať *pravdepodobnosť*

$$P(X < t) = P(X \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{450}}, \text{ pričom počítame postupne pre } t = 600, 650, 700 \text{ hodín.}$$

Výpočet v programe MATLAB s funkciou **expcdf(x, λ)**:

```
>> t=600:50:700;Ft=expcdf(t,450);[t;Ft]
```

```
ans =  
600.0000 650.0000 700.0000  
0.7364 0.7641 0.7889
```

b) Pre dané hodnoty $p = 0,85; 0,9; 0,95$ máme počítať také t , pre ktoré platí:

$$p = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{450}}. \text{ Odtiaľ dostávame: } \frac{-t}{450} = \ln p, \quad t = -450 \cdot \ln p.$$

S použitím MATLABu:

```
>> p=[85,90,95]/100;t=-450*log(p);[p;t]
```

```
ans =  
0.8500 0.9000 0.9500  
73.1335 47.4122 23.0820
```

Keďže platí $F(t) = 1 - p$, môžeme použiť aj kvantilovú funkciu MATLABu **expinv(p, λ)**:

```
>> t=expinv(1-p,450)
```

Príklad Dĺžka automaticky vyrábaných skrutiek je náhodná premenná X , ktorá má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 20$ mm (čo je normovaná dĺžka) a so smerodajnou

odchýlkou $\sigma = 0,1$ mm. Odberateľ očakáva dodávku $n = 50\,000, 800\,000, 1\,000\,000$ skrutiek. Určte strednú hodnotu počtu skrutiek, ktoré budú mať požadovanú dĺžku 20 mm s prípustnou toleranciou $\pm 0,2$ mm.

Riešenie: Spojitá náhodná premenná X v tomto príklade znamená dĺžku automaticky vyrábaných skrutiek a má *normálne rozdelenie pravdepodobnosti* s parametrami $E(X) = \mu = 20$ mm, $\sigma(X) = \sigma = 0,1$ mm. Nech $F(x)$ je jej distribučná funkcia, ktorá ale nie je elementárnou funkciou. Jej hodnoty môžeme nájsť použitím MATABu a jej funkcií ***normcdf(x,μ,σ)*** a ***norminv(p,μ,σ)***. Ďalej nech náhodná premenná Z znamená počet skrutiek z danej dodávky, ktoré budú mať požadovanú dĺžku 20 mm s prípustnou toleranciou $\pm 0,2$ mm. Náhodná premenná Z sleduje *binomické rozdelenie pravdepodobnosti* (opakované nezávislé pokusy) s parametrami n a p , pričom n poznáme a p je neznámy parameter. Počítame p ako *pravdepodobnosť*:
 $p = P(19,8 \leq X \leq 20,2) = F(20,2) - F(19,8)$.

Potom stredná hodnota $E(Z) = n \cdot p$. Použijeme MATLAB:

```
>> p=normcdf(20.2,20,.1)-normcdf(19.8,20,.1)
```

```
p =  
    0.9545
```

```
>> n=[50000,800000,1000000];E=n*p
```

```
E =
```

```
1.0e+005 *
```

```
0.4772    7.6360    9.5450
```