

## Obyčajné diferenciálne rovnice

Na riešenie diferenciálnych rovníc v prostredí MATLABu je možné použitie funkcie **ode23** alebo **ode45**. Rovnicu  $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  prepíšeme na sústavu diferenciálnych rovníc pomocou substitúcií  $y = y_1, y' = y_2, \dots, y_n = y^{(n-1)}$ . Zápis funkcie **ode45** je

**[t,y]=ode45('fundif',[t0 tkoncová],[y(t0) y'(t0) ...])**

**Príklad** Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ , ktoré spĺňa začiatočné podmienky  $y(0) = 1, y'(0) = 3$ .

*Riešenie:*

```
function dy=fundif(t,y) % zápis diferenciálnej rovnice pomocou m-súboru
dy=[y(2);3*y(2)-2*y(1)+2*exp(3*t)];
```

```
>> [t,y]=ode45('fundif',[0 1],[1 3]) % výsledkom sú hodnoty premenných t, y a y'
```

```
t =
    0
    0.0167
    0.0335
    .....
    0.9835
    0.9917
    1.0000
y =
    1.0000    3.0000
    1.0515    3.1546
    1.1057    3.3171
    .....
    19.1150   57.3451
    19.5943   58.7829
    20.0855   60.2566
```

**Príklad** Vypočítajte  $y(0,2)$ , ak  $y(x)$  je riešenie diferenciálnej rovnice  $y' = 100y$  a  $y(0) = 1$ .

*Riešenie:* Použitím funkcie **ode45** dostávame

```
function dy = rigid(t,y) % zápis diferenciálnej rovnice do m-súboru
dy = zeros(1,1); % stĺpcový vektor
dy(1) = 100*y(1); % zápis diferenciálnej rovnice y' = 100y
```

```
>> clear
>> format long
>> options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid,[0 0.2],1,options)
% T=t, Y=y
```

```
T =
    0
    0.00031697863849 % odpovedajúci krok pre zadanú presnosť
    0.00063395727698
    0.00095093591548
    .....
    0.19776475056705
```

0.19888237528353  
0.200000000000000

Y =  
1.0e+008 \*

0.00000001000000  
0.00000001032206  
0.00000001065448

.....  
3.88041718444411  
4.33925334269280  
4.85235474303735

Riešením je  $y = e^{100t}$  a jeho hodnota pre  $t = 0,2$  je

>> exp(20)

ans =

4.851651954097903e+008

Rozdiel

>> c=4.85235474303735e+008-4.851651954097903e+008

c =

7.027889394474030e+004

Ak použijeme vzorce

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y(x_i + h) \approx y_i + K = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

bez testovania vhodnosti kroku  $h = 0,2$  dostávame

$$k_1 = 0,2 \cdot 100 \cdot 1 = 20; \quad k_2 = 0,2 \cdot 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{2}\right) = 220;$$

$$k_3 = 0,2 \cdot 100 \cdot \left(1 + \frac{220}{2}\right) = 2220; \quad k_4 = 0,2 \cdot 100 \cdot (1 + 2220) = 44420$$

$$y(0,2) \approx 1 + \frac{1}{6}(20 + 2 \cdot 220 + 2 \cdot 2220 + 44420) = 8220$$

Uvedený jednoduchý príklad upozorňuje na nevyhnutnosť opatrného používania metód pre numerické riešenie diferenciálnych rovníc. Vidíme, že v tomto prípade je testovacia konštanta pre krok

$$testh = \left| \frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1} \right| = 10 ,$$

pričom by sme mali uvažovať krok, kde  $testh \approx 0,05$ .

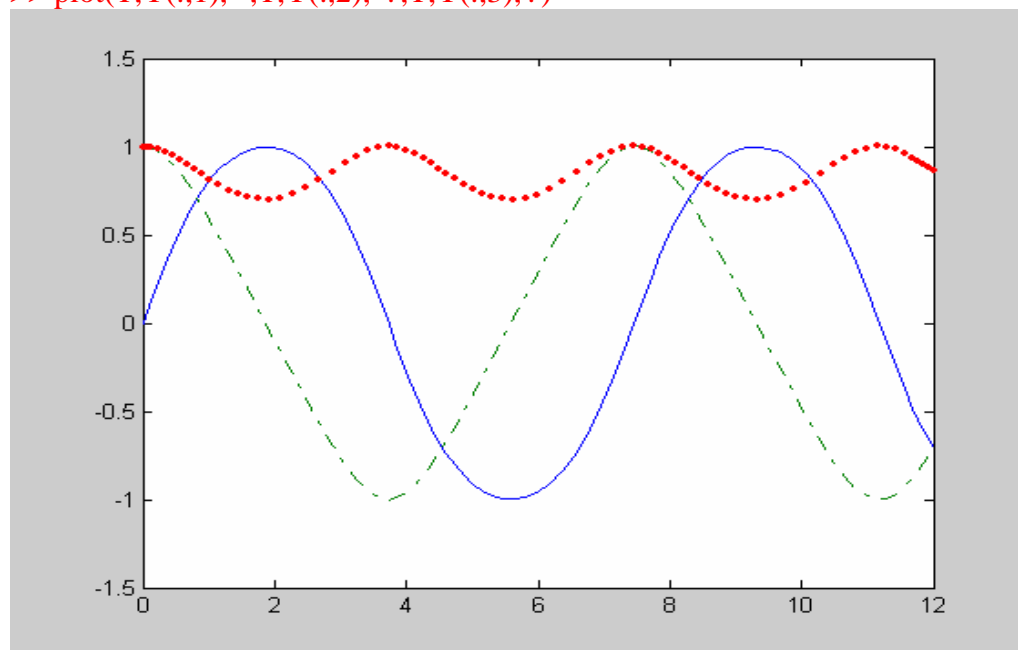
**Príklad** Nájdime riešenie sústavy diferenciálnych rovníc  $y_1' = y_2 y_3$ ,  $y_2' = -y_1 y_3$ ,  $y_3' = -0.51 y_1 y_2$ , so začiatočnými podmienkami  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_3(0) = 1$  na intervale  $\langle 1, 12 \rangle$ . Výsledok znázorníme graficky.

*Riešenie:* Použijeme funkciu

```
options = odeset('name1',value1,'name2',value2,...)
```

```
function dy = rigid2(t,y)           % zápis sústavy diferenciálnych rovníc do m-súboru
dy = zeros(3,1);                   % stĺpcový vektor
dy(1) = y(2) * y(3);
dy(2) = -y(1) * y(3);
dy(3) = -0.51 * y(1) * y(2);
```

```
>> options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid2,[0 12],[0 1 1],options);
>> plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-',T,Y(:,3),'-')
```



Riešenie bez vytvorenia grafu.

```
>> options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid2,[0 12],[0 1 1],options) T =
```

```
0
0.0317
0.0634
.....
11.8473
11.9237
12.0000
Y =
    0    1.0000    1.0000
0.0317    0.9995    0.9997
0.0633    0.9980    0.9990
.....
-0.6041   -0.7972    0.9024
-0.6570   -0.7542    0.8833
-0.7058   -0.7087    0.863
```

Uvedené sú iba tri prvé a tri posledné hodnoty.