

Integrály

Príklad Vypočítajme objem telesa ohraničeného rovinami:

$$z = 0, z = x + y, y = x, y = 0, x = 1.$$

Riešenie: Priemetom daného telesa do roviny o_{xy} je oblasť $\sigma: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x$. Objem daného telesa môžeme vypočítať pomocou dvojného integrálu

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma} (x + y) dx dy.$$

Tento integrál môžeme vypočítať pomocou dvojnásobného integrálu. Dostávame

$$V = \iint_{\sigma} (x + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y) dy.$$

Výpočet dvojnásobného integrálu môžeme urobiť pomocou MATLABu takto:

Zadanie v MATLABe:

```
>> syms x y v real  
>> v=int(int(x+y,y,0,x),x,0,1)
```

Výsledok:

k =
1/2

Príklad Vypočítajme objem telesa ohraničeného plochami: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

Riešenie: Objem môžeme vypočítať pomocou trojného integrálu s použitím cylindrických súradníc. Oblasť V ohraničujúcu dané teleso môžeme popísať takto:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$V: 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\rho \leq z \leq 2 - \rho^2$$

$$V = \iiint_{\omega} \rho d\varphi d\rho dz.$$

Teda

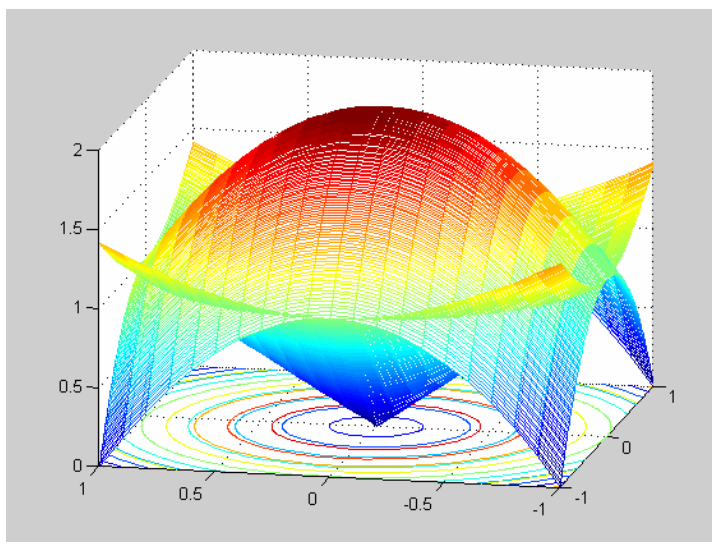
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho dz.$$

Zadanie v MATLABe:

```
>> syms phi rho z real  
>> V=int(int(int(rho,z,rho,2-  
rho^2),rho,0,1),phi,0,2*pi)  
V = 5/6*pi
```

Graf daného telesa môžeme pomocou MATLABU zobrazíť takto:

```
>> [x,y]=meshgrid(-1:0.025:1,-1:0.025:1);  
>> z=2-x.^2-y.^2;  
>> meshc(x,y,z);  
>> hold on;  
>> z=sqrt(x.^2+y.^2);  
>> meshc(x,y,z);  
>> hold off;
```



Príklad Vypočítajme hmotnosť telesa tvaru oblasti ohraničenej rovinami:

$z = 0, z = x + y, y = x, y = 0, x = 1$, ak jeho objemová hustota je $\mu(x, y, z) = kz$.

Riešenie: Hmotnosť môžeme vypočítať pomocou trojného integrálu, kde

$$m = \iiint_{\omega} \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Oblasť ω môžeme popísať pomocou nerovnič takt $\omega: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y$.

Potom

$$m = \iiint_{\omega} \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} kz dz.$$

Uvedený trojnásobný integrál môžeme vypočítať pomocou MATLABu takto:

Zadanie v MATLABe:

```
>> syms x y z m k real
```

```
>> m=int(int(int(k*z,z,0,x+y),y,0,x),x,0,1)
```

Výsledok:

m =

7/24*k.

Príklad Vypočítajte hmotnosť drôtu tvaru

krivky $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$,

$t \in \langle 0, 10\pi \rangle$. Prierezová hustota drôtu je

$\mu(x, y, z) = z$.

Riešenie: Hmotnosť drôtu vypočítame pomocou krivkového integrálu prvého druhu:

$$m = \int_l \mu(x, y, z) ds = \int_0^{10\pi} t ds,$$

kde $ds = \sqrt{(2 \cos t)' ^2 + (2 \sin t)' ^2 + (t)' ^2} dt$.

Použitím MATLABU dostávame:

```
>> syms t real;
```

```
>> d=sqrt((diff(2*cos(t),t))^2+(diff(2*sin(t),t))^2+(diff(t,t))^2)
```

d =

```
(4*sin(t)^2+4*cos(t)^2+1)^(1/2)
```

```
>> m=int(t*d,t,0,10*pi)
```

m =

```
50*pi^2*5^(1/2)
```

