

Funkcia viac premenných

Príklad Vypočítajte $c = \frac{df(x)}{dx}$ a $c2 = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, ak $f(x) = \sin 2x + \sin x^2 + \sin^2 x$.

Riešenie:

```
>> syms x
>> f = sin(2*x)+sin(x^2)+(sin(x))^2
f =
sin(2*x)+sin(x^2)+sin(x)^2
>> c=diff(f,x)
c =
2*cos(2*x)+2*cos(x^2)*x+2*sin(x)*cos(x)
>> c2=diff(f,x,2)
c2 =
-4*sin(2*x)-4*sin(x^2)*x^2+2*cos(x^2)+2*cos(x)^2-2*sin(x)^2
```

Príklad Vypočítajte $s = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y}$ ak $g(x, y) = x^3 y + y - x$.

Riešenie:

```
>> syms a x y
>> g=x^3*y+y-x
g =
x^3*y+y-x
>> s=diff(diff(g,x),y)
s =
3*x^2
```

Príklad Nájdime lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Riešenie A:

```
>> syms x y
>> f=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
f = x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
>> fx=diff(f,x)
fx = 3*x^2+3*y^2-15
>> fy=diff(f,y)
fy = 6*x*y-12
>> [x,y] = solve(fx, fy)
x = y =
[ 2] [ 1]
[ 1] [ 2]
[-1] [-2]
[-2] [-1]
```

Teda body $P_1 = (2;1)$, $P_2 = (1;2)$, $P_3 = (-1;-2)$, $P_4 = (-2;-1)$, sú stacionárne body danej funkcie. Nájdeme druhé derivácie:

```
>> fxy=diff(diff(f,x),y)
fxy = 6*y
>> fxx=diff(diff(f,x),x)
fxx = 6*x
```

```
>> fyy=diff(diff(f,y),y)
```

```
fyy = 6*x
```

```
>> D=fx*fy-(fxy)^2
```

```
D = 36*x^2-36*y^2
```

Môžeme to urýchliť pomocou MATLABU napríklad takto:

```
>> syms x y f;
```

```
>> f=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y;
```

```
>> J = jacobian([diff(f,x); diff(f,y)], [x y])
```

```
J =
```

```
[ 6*x, 6*y]
```

```
[ 6*y, 6*x]
```

```
>> D2=det()
```

```
D2 =
```

```
36*x^2-36*y^2
```

Teraz overíme podmienky pre existenciu lokálnych extrémov v stacionárnych bodoch.

Pre prvý bod $P_1 = (2;1)$ dostávame:

```
>> x=2, y=1
```

```
x = 2
```

```
y = 1
```

```
>> DP1=36*x^2-36*y^2
```

```
DP1 = 108
```

čo je kladné a teda v bode $P_1 = (2;1)$ funkcia má lokálny extrém. Pretože $fx(2,1) = 6 \cdot 2 > 0$

daná funkcia $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ má v bode $P_1 = (2;1)$ lokálne minimum $= f(P_1)$.

Pričom

```
>> fP1=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
```

```
fP1 = -28
```

V bode $P_2 = (1;2)$ je

```
>> x=1, y=2
```

```
x = 1
```

```
y = 2
```

```
>> DP1=36*x^2-36*y^2
```

```
DP1 = -108
```

čo je záporné a teda v bode $P_2 = (1;2)$ daná funkcia nemá lokálny extrém. Podobne

postupujeme v bodoch $P_3 = (-1;-2)$, $P_4 = (-2;-1)$.

RiešenieB:

```
>> format rat;
```

% výsledky v tvare zlomku

```
>> f=inline('x(1)^3+3*x(1)*x(2)^2-15*x(1)-12*x(2)','x')
```

% zadanie funkcie

```
f =
```

Inline function:

```
f(x) = x(1)^3+3*x(1)*x(2)^2-15*x(1)-12*x(2)
```

```
>> xmin0=[1.5,0.5];xmin=fminsearch(f,x0)
```

% xmin0 je odhad

```
xmin =
```

```
105131/52565 32955/32954
```

% funkcia má lokálne minimum
v bode $P_2 = (2,1)$

```
>> fmin=f(xmin)
```

```
fmin =
```

```

-28
>> xmax0=[-1.5,-0.5];xmax=-fminsearch(f,x0)
xmax =
-546501/273250 -28901/28900
>> fmax=f(xmax)
fmax =
28

```

$\% f_{\text{lok min}} = f(2,1) = -28$
 $\% \text{ xmax0 je odhad}$
 $\% \text{ funkcia má lokálne maximum}$
 $\% \text{ v bode } P_4 = (-2,-1)$

Príklad Nájdime lokálne extrémny funkcie $z = f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$.

Riešenie A:

```

>> syms x y
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2)
z = x*exp(-x^2-y^2)

>> fx=diff(z,x),fy=diff(z,y)
fx = exp(-x^2-y^2)-2*x^2*exp(-x^2-y^2)
fy = -2*x*y*exp(-x^2-y^2)
>> [x,y] = solve(fx, fy)
x =
[ 1/2*2^(1/2)]
[ -1/2*2^(1/2)]
y =
[ 0]
[ 0]
>> syms x y
>> fxy=diff(diff(z,x),y)
fxy = -2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2)
>> fxx=diff(diff(z,x),x)
fxx = -6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2)
>> fyy=diff(diff(z,y),y)
fyy = -2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2)
>> D2=fxx*fyy-(fxy)^2
D2 =
(-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2))*(-2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2))-
(-2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2))^2

```

Môžeme to urýchliť pomocou MATLABU napríklad takto:

```

>> syms x y f;
>> f=x.*exp(-x.^2-y.^2);
>> J = jacobian([diff(f,x); diff(f,y)], [x y]);
>> D2=det(J)
D2 =
12*x^2*exp(-x^2-y^2)^2-8*x^2*exp(-x^2-y^2)^2*y^2-8*x^4*exp(-x^2-y^2)^2-4*y^2*exp(-
x^2-y^2)^2

```

Teraz overíme podmienky pre existenciu lokálnych extrémov v stacionárnych bodoch.

Pre prvý bod $P_1 = (1/2 * 2^{1/2}; 0)$ dostávame:

```
>> x= 1/2*2^(1/2),y=0
x = 0.7071
y = 0
>> DP1=(-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2))*(-2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2))-(-2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2))^2
DP1 = 1.4715
```

Alebo

```
>> eval('12*x^2*exp(-x^2-y^2)^2-8*x^2*exp(-x^2-y^2)^2*y^2-8*x^4*exp(-x^2-y^2)^2-4*y^2*exp(-x^2-y^2)^2',[x,y])
ans =
1.4715
```

čo je kladné a teda v bode P_1 funkcia má lokálny extrém. Pretože

```
>> x= 1/2*2^(1/2),y=0
>> fxx=-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2)
```

```
fxx(P1) = -1.7155
```

je záporná, daná funkcia má v bode P_1 lokálne maximum, pričom

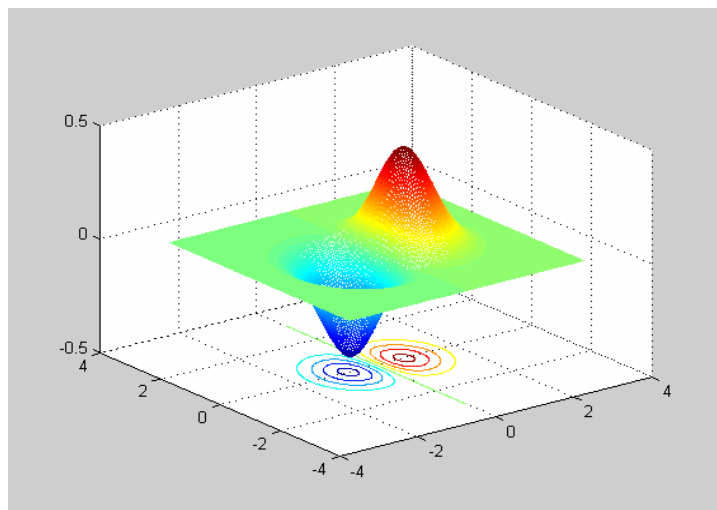
```
>> lokmaxf=x.*exp(-x.^2-y.^2)
```

```
lokmaxf = 0.4289
```

Podobne by sme vyšetrili aj bod P_2 .

Graf danej funkcie v okolí uvedených bodov dostaneme takto:

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:0.025:3,-3:0.025:3);
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
>> meshc(x,y,z);
```



RiešenieB: Zostrojíme si časť grafu danej funkcie

Odhadom (z grafu) určíme body kde funkcia má lokálne extrém x_{min0} , x_{max0}

```
>> format rat;
>> f=inline('x(1)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)','x')
f =
```

Inline function:

```
f(x) = x(1)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)
```

```
>> x0=[-0.5,0];xmin=fminsearch(f,x0)
```

```
xmin =
-1357/1919 -108/218159
```

Teda daná funkcia má lokálne minimum v bode $P_1 = \left(-\frac{1357}{1919}, -\frac{108}{218159}\right) \approx (0,707139;0)$

```
>> fmin=f(xmin)
```

```
fmin =
-395/921
```

Podobne postupujeme pri hľadaní lokálneho maxima

```
>> x0=[0,0.5];xmax=-fminsearch(f,x0)
```

```
xmax =
1910/2701 4/127461
```