

Výpočet pravdepodobnosti

Príklad Zo sérií $M = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ výrobkov, v ktorých sa nachádza 20 nepodarkov, náhodne vyberieme na kontrolu kvality 5 výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými výrobkami bude práve $k = 0, 1, \dots, 5$ nepodarkov.

Riešenie: Uvažujme prípad $M = 50$. Označme A_k jav, pozostávajúci z výberu k nepodarkov z 5 náhodne vybraných výrobkov, kde $k = 0, 1, \dots, 5$. Použijeme definíciu *klasickej*

$$\text{pravdepodobnosti: } P(A_k) = \frac{\binom{20}{k} \cdot \binom{30}{5-k}}{\binom{50}{5}}.$$

Pri riešení môžeme použiť štandardnú funkciu MATLABu, a to **hygepdf(k,M,K,n)** pre počet všetkých prvkov súboru $M = 50$, počet prvkov, ktoré majú sledovanú vlastnosť $K = 20$, rozsah výberu bez vrátenia $n = 5$, pričom príslušné pravdepodobnosti počítame pre $k = 0, 1, \dots, 5$:

```
>> [0:5;hygepdf(0:5,50,20,5)]
```

```
ans =  
      0  1.0000  2.0000  3.0000  4.0000  5.0000  
0.0673  0.2587  0.3641  0.2341  0.0686  0.0073
```

Analogicky počítame postupne pre $M = 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$.

Poznámka Bežný výstup výsledkov MATLABu (short) je na 4 desatinné miesta. Ak chceme zvýšiť presnosť výstupov, použijeme prepínač **format long**, **format short e**, resp. iné (pozrite **help format**).

Danú úlohu môžeme vyriešiť naraz, pre všetky zadané M , použitím príkazu **[X,Y]=meshgrid(x,y)**. Ak je napríklad x n -rozmerný a y m -rozmerný vektor, tento príkaz vytvára maticu X s vektorom x v každom z m riadkov a maticu Y s vektorom y v každom z n stĺpcov. Obidve matice sú teda typu $m \times n$ a keby boli položené na seba, stretne sa každá zložka vektora x s každou zložkou vektora y .

Použijeme výpočet v programe MATLAB:

```
>> k=0:5;M=50:50:500;[k,M]=meshgrid(k,M);format short e;  
pak=komb(20,k).*komb(M-20,5-k)./komb(M,5)
```

resp.:

```
>> k=0:5;M=50:50:500;[k,M]=meshgrid(k,M);  
format short e;pak=hygepdf(k,M,20,5)
```

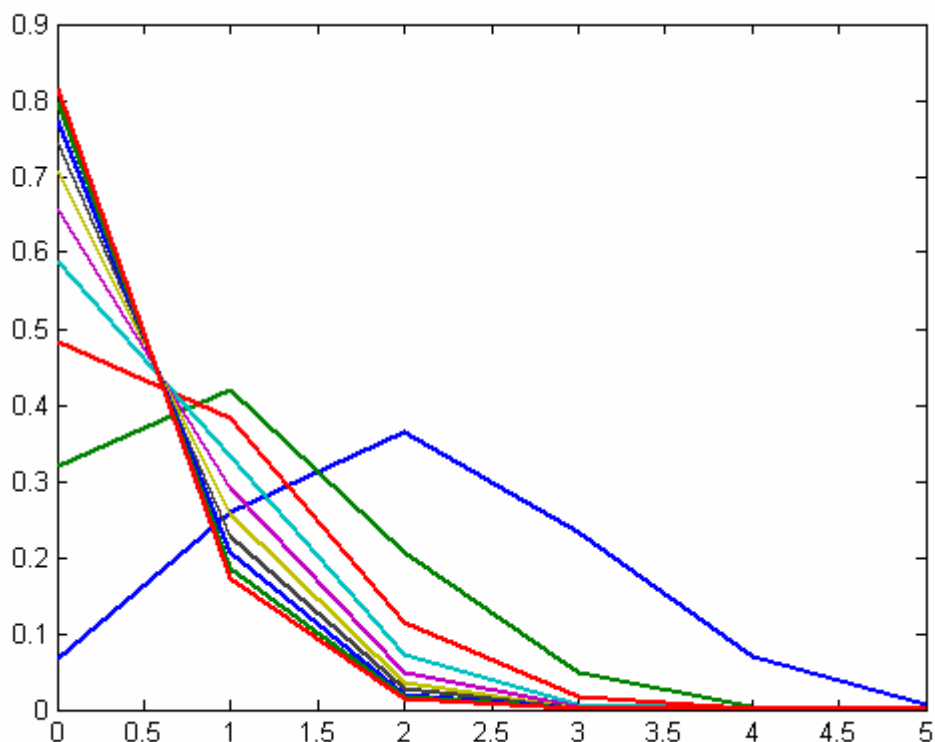
```
pak =  
6.7259e-002 2.5869e-001 3.6408e-001 2.3405e-001 6.8601e-002 7.3175e-003  
3.1931e-001 4.2014e-001 2.0734e-001 4.7849e-002 5.1483e-003 2.0593e-004  
4.8385e-001 3.8401e-001 1.1490e-001 1.6158e-002 1.0647e-003 2.6207e-005  
5.8717e-001 3.3362e-001 7.1624e-002 7.2429e-003 3.4394e-004 6.1144e-006  
6.5676e-001 2.9060e-001 4.8647e-002 3.8406e-003 1.4255e-004 1.9834e-006
```

7.0654e-001 2.5599e-001 3.5118e-002 2.2738e-003 6.9275e-005 7.9171e-007
 7.4382e-001 2.2817e-001 2.6515e-002 1.4551e-003 3.7593e-005 3.6454e-007
 7.7276e-001 2.0552e-001 2.0716e-002 9.8645e-004 2.2124e-005 1.8630e-007
 7.9584e-001 1.8682e-001 1.6625e-002 6.9920e-004 1.3854e-005 1.0310e-007
 8.1469e-001 1.7115e-001 1.3635e-002 5.1345e-004 9.1113e-006 6.0742e-008

Zaujímavé je grafické zobrazenie príslušných pravdepodobností použitím príkazu **plot(x,y)**, ktorý spája čiarou body, ktorých prvé, resp. druhé súradnice sú zložkami vektora x , resp. y .

Poznámka Pozrite **help plot**. Pri kreslení grafu máme možnosť zvoliť si farbu, rôzne zvýraznenia bodov, ako aj hrúbku čiary. Dva jednoduché apostrofy ohraňujú reťazec znakov. Jeden apostrof bezprostredne za maticou vytvára transponovanú maticu.

>> plot(0:5,pak','linewidth',2)



Príklad V nádobe je 12 loptičiek, z nich je 9 nových. Pre 1. hru sa z nádoby náhodne vyberú 3 loptičky, ktoré sa po hre vrátia späť. Pre 2. hru sa z tejto nádoby opäť vyberú 3 loptičky. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky 3 už boli použité?

Riešenie: Označme A jav, že pre 2. hru sa náhodne vyberú 3 použité loptičky a javy H_0, H_1, H_2, H_3 , že pre 1. hru sa náhodne vyberú v postupnom poradí: žiadna nová a 3 použité, 1 nová a 2 použité, 2 nové a 1 použitá, 3 nové loptičky a žiadna použitá loptička. Použijeme vetu o úplnej pravdepodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i).$$

Príslušné pravdepodobnosti hypotéz a podmienené pravdepodobnosti vypočítame na základe definície *klasikkej pravdepodobnosti*:

$$P(H_i) = \frac{\binom{9}{i} \cdot \binom{3}{3-i}}{\binom{12}{3}}, \quad P(A|H_i) = \frac{\binom{9-i}{0} \cdot \binom{3+i}{3}}{\binom{12}{3}}, \text{ pre } i = 0, 1, 2, 3.$$

Použitím funkcie **hygepdf** dostávame:

```
>> pa=sum(hygepdf(0:3,12,9,3).*hygepdf(0,12,9-(0:3),3))
```

```
pa =  
0.0593
```

Príklad Vo vrecku máme 10 guľôčok bielej alebo čiernej farby, pričom vieme, že čiernych guľôčok môže byť najviac 5. Každý počet 0, 1, 2, 3, 4, 5 čiernych guľôčok je rovnako možný. Z vrecka náhodne vyberieme 5 guľôčok a zistíme, že všetky sú biele. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi zvyšnými guľôčkami vo vrecku je $k = 0, 1, \dots, 5$ čiernych guľôčok?

Riešenie: Označme A jav, že všetkých 5 náhodne vytiahnutých guľôčok je bielych a javy H_i , že vo vrecku je i čiernych guľôčok, pre $i = 0, 1, \dots, 5$. Ďalej javy $H_k | A$ označujú, že medzi zvyšnými guľôčkami (ak všetkých 5 náhodne vytiahnutých guľôčok pri uskutočnenom výbere je bielych) je $k = 0, 1, \dots, 5$ čiernych guľôčok. Použijeme *Bayesovu vetu*:

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A | H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)}.$$

Javy H_i tvoria *úplný systém nezlúčiteľných javov* a keďže každý počet $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ čiernych guľôčok je rovnako možný, pre pravdepodobnosti hypotéz $P(H_i)$ bude platiť: $P(H_i) = 1/6$.

Podmienené pravdepodobnosti $P(A | H_i)$ vypočítame na základe definície *klasickej*

pravdepodobnosti: $P(A | H_i) = \frac{\binom{10-i}{5} \cdot \binom{i}{0}}{\binom{10}{5}}.$ Podmienené pravdepodobnosti $P(H_k | A)$

vypočítame použitím MATLABu:

```
>> ph=ones(1,6)/6;pah=hygepdf(5,10,10-(0:5),5);pha=ph.*pah/sum(ph.*pah)
```

```
pha =  
0.5455 0.2727 0.1212 0.0455 0.0130 0.0022
```