

Náhodná premenná

Príklad V dvoch urnách sú očíslované loptičky. V 1. urne majú dve loptičky číslo 1 a jedna loptička číslo 3. V 2. urne má jedna loptička číslo 1 a dve loptičky číslo 2. Z oboch urien sa náhodne vyberie po jednej loptičke a vypočíta sa súčin ich čísel. Získané číslo určuje hodnotu náhodnej premennej X , pre ktorú nájdime: a) pravdepodobnostnú tabuľku; b) pravdepodobnosti $P(X \leq 3)$, $P(2 < X \leq 6)$; c) distribučnú funkciu a jej graf; d) $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $Mo(X)$.

Riešenie: a) Príslušná diskretná náhodná premenná X môže nadobúdať hodnoty $x_i = 1, 2, 3, 6$. Máme vypočítať pravdepodobnosti $p_i = P(X = x_i)$ nadobudnutia hodnôt x_i . Platí:

$$P(X = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Na základe vypočítaných hodnôt zostavíme pravdepodobnostnú tabuľku. V Octave je:

```
octave:1> xi=[1,2,3,6];
octave:2> pi=[2,4,1,2]/9;
octave:3> [xi,pi]
ans =
```

```
1.00000 2.00000 3.00000 6.00000
0.22222 0.44444 0.11111 0.22222
```

b) Pre diskretnú náhodnú premennú platí: $P(X \leq 3) = p_1 + p_2 + p_3$, $P(2 < X \leq 6) = p_3 + p_4$.

```
octave:4> sum(pi(1:3)),sum(pi(3:4))
ans = 0.77778
ans = 0.33333
```

c) **Distribučná funkcia** (CDF – Cumulative Distribution Function) náhodnej premennej X je definovaná pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ vzťahom: $F(x) = P(X \leq x)$ (Pozor na definíciu!!!). V prípade **diskrétnej** náhodnej premennej platí: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$. Vypočítajme hodnoty distribučnej

funkcie pre dané x_i :

```
octave:5> F=cumsum(pi);[xi;F]
ans =
```

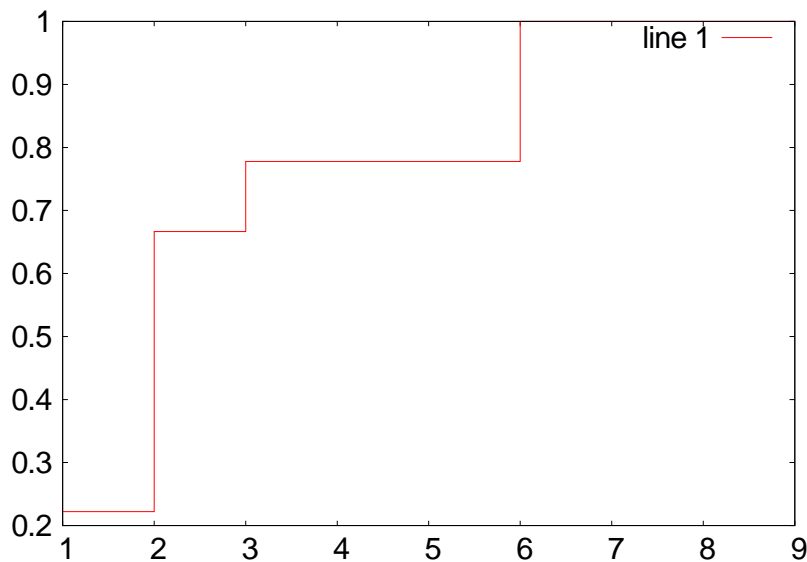
```
1.00000 2.00000 3.00000 6.00000
0.22222 0.66667 0.77778 1.00000
```

Na základe tejto pomocnej tabuľky zostavíme distribučnú funkciu:

$$F(x) = \begin{cases} 0,0000 & \text{pre } -\infty < x < 1 \\ 0,2222 & \text{pre } 1 \leq x < 2 \\ 0,6667 & \text{pre } 2 \leq x < 3 \\ 0,7778 & \text{pre } 3 \leq x < 6 \\ 1,000 & \text{pre } 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

Na zjednodušené zobrazenie grafu distribučnej funkcie diskkrétnej náhodnej premennej použijeme príkaz

```
octave:6> stairs(xi,F)
```



d) *Stredná hodnota* $E(X)$, *disperzia* $D(X)$ a *smerodajná odchýlka* $\sigma(X)$ sa vypočítajú podľa vzorcov: $E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$, $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Výpočet zrealizujeme takto:

```
octave:7> E=sum(xi.*pi),D=sum(xi.^2.*pi)-E^2,sigma=sqrt(D)
```

E = 2.7778

D = 3.2840

sigma = 1.8122

Modus $Mo(X)$ je tá hodnota diskkrétnej náhodnej premennej, ktorá má najväčšiu pravdepodobnosť. Nájďme ju priamo z pravdepodobnostnej tabuľky: $Mo(X) = 2$.

Príklad Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Určme strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú (štandardnú) odchýlku náhodnej premennej X .

Riešenie:

```
octave:2 > xi=[0,1,2,3,4];pi=[0.0256,0.1536,0.2456,0.3456,0.1296];
```

Výpočet disperzie (rozptylu, variácie)

```
octave:3> E=sum(xi.*pi)
```

E = 2.4000

```
octave:4> D=sum(xi.^2.*pi)-E^2
```

D = 0.96000

Výpočet štandardnej odchýlky

```
octave:5> sigma=sqrt(D)
```

sigma = 0.97980