

## Náhodná premenná

**Príklad** V dvoch urnách je po troch očíslovaných loptičkách. V 1. urne majú dve loptičky číslo 1 a jedna loptička číslo 3. V 2. urne má jedna loptička číslo 1 a dve loptičky číslo 2. Z oboch urien sa náhodne vyberie po jednej loptičke a vypočíta sa súčin ich čísel. Získané číslo je náhodná premenná  $X$ , pre ktorú nájdime: a) pravdepodobnostnú tabuľku; b) pravdepodobnosti  $P(X \leq 3)$ ,  $P(2 < X \leq 6)$ ; c) distribučnú funkciu a jej graf; d)  $E(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ ,  $Mo(X)$ ; e) polygón rozdelenia pravdepodobnosti, histogram a úsečkový graf.

**Riešenie:** a) Príslušná diskretná náhodná premenná  $X$  môže nadobúdať hodnoty  $x_i = 1, 2, 3, 6$ . Máme vypočítať pravdepodobnosti  $f(x_i) = p_i = P(X = x_i)$  nadobudnutia hodnôt  $x_i$ . Platí:

$$P(X = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Na základe vypočítaných hodnôt zostavíme *pravdepodobnostnú tabuľku*. Použijeme MATLAB:

```
>> xi=[1,2,3,6];pi=[2,4,1,2]/9;format rat;[xi;pi]
```

```
ans =  
     1     2     3     6  
    2/9    4/9    1/9    2/9
```

b) Pre diskretnú náhodnú premennú platí:  $P(X \leq 3) = p_1 + p_2 + p_3$ ,  $P(2 < X \leq 6) = p_3 + p_4$ . V MATLABe:

```
>> sum(pi(1:3)),sum(pi(3:4))
```

```
ans =  
    7/9  
ans =  
    1/3
```

c) *Distribučná funkcia* (CDF – Cumulative Distribution Function) náhodnej premennej  $X$  je definovaná pre každé  $x \in (-\infty, \infty)$  vzťahom:  $F(x) = P(X \leq x)$ . V prípade *diskrétnej* náhodnej premennej platí:  $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$ . Vypočítajme si hodnoty distribučnej funkcie pre dané  $x_i$ :

```
>> F=cumsum(pi);[xi;F]
```

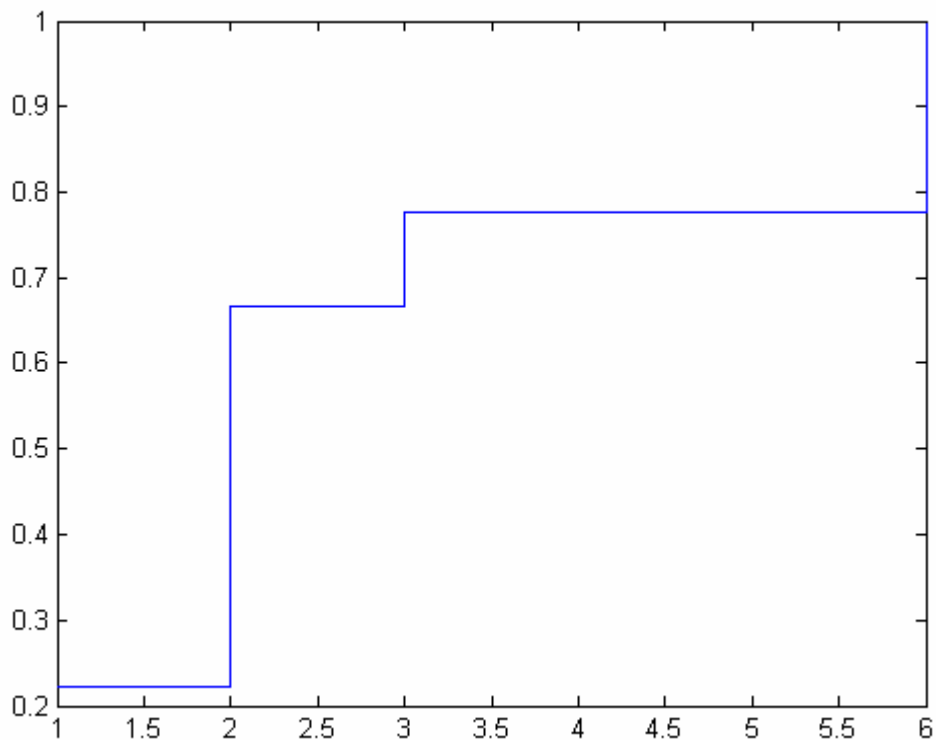
```
ans =  
     1     2     3     6  
    2/9    2/3    7/9     1
```

Na základe tejto pomocnej tabuľky zostavíme distribučnú funkciu:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } -\infty < x < 1 \\ 2/9, & \text{pre } 1 \leq x < 2 \\ 6/9, & \text{pre } 2 \leq x < 3 \\ 7/9, & \text{pre } 3 \leq x < 6 \\ 9/9 = 1, & \text{pre } 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

Na zjednodušené zobrazenie *grafu distribučnej funkcie* diskrétnej náhodnej premennej použijeme príkaz MATLABu:

```
>> stairs(xi,F)
```



d) *Stredná hodnota*  $E(X)$ , *disperzia*  $D(X)$  a *smerodajná odchýlka*  $\sigma(X)$  sa vypočítajú podľa vzorcov:  $E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$ ,  $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

Výpočet zrealizujeme v programe MATLAB:

```
>> E=sum(xi.*pi),D=sum(xi.^2.*pi)-E^2,sigma=sqrt(D)
```

```
E =
    25/9
D =
    266/81
sigma =
    2383/1315
```

Výpočet týchto charakteristík môžeme realizovať aj takto:

```
>> x=[1,1,2,2,2,2,3,6,6],E=mean(x),D=var(x,1),sigma=std(x,1)
```

```
x =
    1    1    2    2    2    2    3    6    6
E =
    2.7778
D =
    3.2840
sigma =
    1.8122
```

**Poznámka** Existujú funkcie na priamy výpočet charakteristík, ktoré obyčajne používame v štatistike:

**mean(x), var(x), var(x,1), std(x), std(x,1).**

Pozor, napríklad funkcii **std(x)** odpovedá

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2},$$

funkcii **std(x,1)** odpovedá

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

*Modus*  $Mo(X)$  je tá hodnota diskkrétnej náhodnej premennej, ktorá má najväčšiu pravdepodobnosť. Nájde ju priamo z pravdepodobnostnej tabuľky:  $Mo(X) = 2$ .

e) *Polygón rozdelenia pravdepodobnosti, histogram a úsečkový graf* použitím MATLABu:

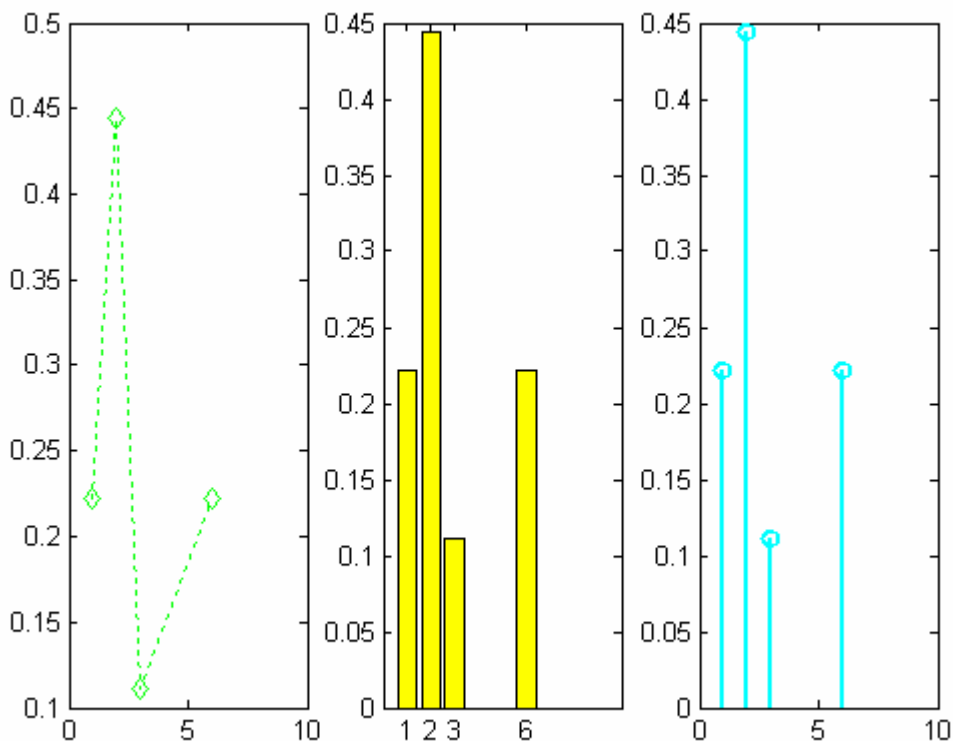
**>> figure;plot(xi,pi),figure;bar(xi,pi),figure;stem(xi,pi)**

resp. použijeme funkciu **subplot**, ktorá umožňuje umiestniť viac obrázkov do jedného grafického okna:

**>> subplot(1,3,1);plot(xi,pi),subplot(1,3,2);bar(xi,pi),subplot(1,3,3);stem(xi,pi)**

resp., keď si chceme nastaviť hrúbku čiary, zvýraznenie bodov a rôzne farby:

**>> subplot(1,3,1);plot(xi,pi,'d:g'),subplot(1,3,2);bar(xi,pi,'y'),  
subplot(1,3,3);s=stem(xi,pi,'c');set(s,'linewidth',2)**



**Príklad** Daná je funkcia  $F(x) = a + b e^{-2x}$ , pre  $x \in (0, \infty)$ . Určte: a) pre aké hodnoty  $a, b \in \mathbb{R}$  je  $F(x)$  distribučnou funkciou náhodnej premennej  $X$ ; b) hustotu pravdepodobnosti  $f(x)$ ; c) pravdepodobnosť  $P(1/2 \leq X < 2)$ ; d)  $E(X), D(X)$ .

**Riešenie:** a) Konštanty  $a, b$  vypočítame na základe spojitosti sprava distribučnej funkcie náhodnej premennej  $X$ :

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = a + b, \quad 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = a.$$

Použitím modulu *Symbolic Math* môžeme všeobecne počítat limity:

```
>> syms a b x real
limit(a+b*exp(-2*x),x,0,'right')
limit(a+b*exp(-2*x),x,inf)
```

```
ans =
a+b
ans =
a
```

Odtiaľ získame výsledky:  $a = 1, b = -1$ , teda  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x}, & \text{pre } 0 < x < \infty \end{cases}$ .

b) *Hustota pravdepodobnosti*  $f(x)$  je prvou deriváciou distribučnej funkcie:  $f(x) = F'(x)$ .

Na derivovanie môžeme použiť opäť MATLAB (pre  $x \in (0, \infty)$ ):

```
>> F=1-exp(-2*x);f=diff(F,x)
```

```
f =
2*exp(-2*x)
```

Teda hustota pravdepodobnosti bude:  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \leq 0 \\ 2e^{-2x}, & \text{pre } 0 < x < \infty \end{cases}$ .

c) Pre *spojitú* náhodnú premennú  $X$  platí vzorec pre výpočet *pravdepodobnosti*:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Teda bude platiť:  $P(1/2 \leq X < 2) = \int_{1/2}^2 2e^{-2x} dx = F(2) - F(1/2) = e^{-1} - e^{-4}$ .

Na výpočet danej pravdepodobnosti môžeme využiť aj MATLAB, pričom budeme počítat integrál z hustoty pravdepodobnosti:

```
>> int(f,x,1/2,2)
```

```
ans =
-exp(-4)+exp(-1)
```

Alebo použijeme príkaz **double**, ktorý zabezpečuje prevod symbolu na číslo:

```
>> double(int(f,x,1/2,2))
```

Výpočet danej pravdepodobnosti použitím distribučnej funkcie:

```
>> subs(F,2)-subs(F,1/2)
```

Dostaneme rovnaký výsledok:

```
ans =  
0.3496
```

d) *Stredná hodnota*  $E(X)$  a *disperzia*  $D(X)$  sa vypočítajú podľa vzorcov:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Dostaneme integrály, ktoré vypočítame metódou *per partes*:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx, \quad E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x} dx.$$

V tomto prípade je analytický výpočet pomerne zdĺhavý, takže oceníme možnosti MATLABu:

```
>> E=int(x*f,x,0,inf),D=int(x^2*f,x,0,inf)-E^2
```

```
E =  
1/2  
D =  
1/4
```

**Príklad** Daná je funkcia  $f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos 2x, & x \in (0, \pi/4) \\ 0, & x \notin (0, \pi/4) \end{cases}$ .

Určte: a) pre akú hodnotu  $k \in \mathbb{R}$  je  $f(x)$  hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$ ; b) príslušnú distribučnú funkciu  $F(x)$  a jej graf.

*Riešenie:* a) Pre hustotu pravdepodobnosti platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Odtiaľ dostávame pre hľadanú konštantu  $k$ :  $1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} k \cdot \cos 2x dx \Rightarrow k = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}.$

Môžeme využiť MATLAB:

```
>> syms x k t real  
k=1/int(cos(2*x),x,0,pi/4)
```

```
k =  
2
```

b) *Distribučnú funkciu*  $F(x)$  nájdeme na základe vzťahu:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

MATLAB pre výpočet distribučnej funkcie:

```
>> f=k*cos(2*t);F=int(f,t,0,x)
```

```
F =  
sin(2*x)
```

Teda dostávame:  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & x \in (0, \pi/4) \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}.$

Graf  $F(x)$ :

```
>> x=0:0.001:pi/4;F=[0,subs(F),1]; x=[-.5,x,pi/4+.3];  
figure;plot(x,F,'g','linewidth',3)
```

