

Intervalový odhad parametrov základného súboru

Príklad Náhodným výberom sme vybrali 100 výrobkov, u ktorých sme zistili priemernú hmotnosť 2,2 kg. Na základe dlhodobých pozorovaní vieme, že smerodajná odchýlka $\sigma = 0,6$ kg. Za predpokladu normálneho rozdelenia výberového súboru nájdime:

- a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemernú hmotnosť výrobku;
- b) 90 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre priemernú hmotnosť výrobku;
- c) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre priemernú hmotnosť výrobku.

Riešenie: a) S pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *obojstranný* interval spoľahlivosti (IS) pre strednú hodnotu μ určený reláciou, pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme :

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Dosadíme: $n = 100$; $\bar{x} = 2,2$; $\sigma = 0,6$; $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$; $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = y_{0,975} = 1,9600$.

Kvantil normovaného normálneho rozdelenia sa v MATLABe vypočíta pomocou funkcie **norminv**:

```
>> c=norminv(.975)
```

c =

1.9600

Hľadaný IS je: $\mu \in \langle 2,0824 ; 2,3176 \rangle$.

b) Hľadaný *ľavostranný* IS s koeficientom spoľahlivosti $1-\alpha$ určuje relácia (pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme):

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right\rangle.$$

Dosadíme: $n = 100$; $\bar{x} = 2,2$; $\sigma = 0,6$; $\alpha = 1 - 0,9 = 0,1$; $y_{1-\alpha} = y_{0,9} = 1,2816$.

Kvantil normovaného normálneho rozdelenia v MATLABe bude:

```
>> cl=norminv(.9)
```

cl =

1.2816

Hľadaný IS bude: $\mu \in \langle 2,1231 ; \infty \rangle$.

c) Analogicky pri *pravostrannom* IS pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α , pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme, použijeme reláciu:

$$\mu \in \left(-\infty, \bar{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Dosadíme: $n = 100$; $\bar{x} = 2,2$; $\sigma = 0,6$; $\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$; $y_{1-\alpha} = y_{0,99} = 2,3263$.

Kvantil normovaného normálneho rozdelenia:

>> cp=norminv(.99)

cp =

2.3263

Hľadaný IS bude: $\mu \in (-\infty ; 2,3396)$.

Príklad Zo základného súboru s normálnym rozdelením sme urobili náhodný výber s realizáciami: 22,4; 28,0; 20,1; 27,4; 23,9; 24,8; 26,4; 27,0; 25,4; 25,6. Nájdime:

- a) 95 %-ný *obojsstranný* interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- b) 95 %-ný *obojsstranný* interval spoľahlivosti pre smerodajnú odchýlku.

Riešenie- spôsob A:

a) V našom prípade je neznáma smerodajná odchýlka σ základného súboru, teda s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *obojsstranný* IS pre strednú hodnotu μ určený reláciou:

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Dosadíme:

$n = 10$; $\bar{x} = 25,1000$; $s^* = \sqrt{s^{*2}} = 2,4304$;

$\alpha = 1-0,95 = 0,05$; $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,975;9} = 2,2622$.

Výpočet v MATLABe:

>> x=[224,280,201,274,239,248,264,270,254,256]/10;n=10;m=mean(x),s=std(x)

c=tinv(.975,9),L=m-c*s/sqrt(10),P=m+c*s/sqrt(10)

m =

25.1000

s =

2.4304

c =

2.2622

L =

23.3614

P =

26.8386

Dostávame teda: $\mu \in \langle 23,3614 ; 26,8386 \rangle$.

b) S pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *obojsstranný* IS pre smerodajnú odchýlku určený reláciou:

$$\sigma \in \left\langle \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \right\rangle.$$

Dosadíme:

$n = 10$; $s^{*2} = 5,9067$; $\alpha = 0,05$;

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0,975;9} = 19,0228; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0,025;9} = 2,7004.$$

Výpočet v MATLABe:

```
>> s2=var(x),cl=chi2inv(.975,9),cp=chi2inv(.025,9),l=sqrt((n-1)*s2/cl),p=sqrt((n-1)*s2/cp)
```

s2 =

5.9067

cl =

19.0228

cp =

2.7004

l =

1.6717

p =

4.4369

Dostávame teda: $\sigma \in \langle 1,6717 ; 4,4369 \rangle$.

Riešenie - spôsob B:

Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu, resp. smerodajnú odchýlku môžeme nájsť použitím príkazu:

```
[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(x,alpha)
```

Môžeme to riešiť tiež pomocou príkazu:

```
[h,sig,ci] = ttest(x,m,alpha,tail)
```

Týmto spôsobom robíme aj testovanie hypotéz (**pozor na rozdielne označenia pre pravostranný a ľavostranný interval v niektorej literatúre – odporúča sa preveriť si to na jednoduchom príklade**).

tail =0 alebo **'both'** (t.j. obojstranný odhad)

tail =1 alebo **'right'** (t.j. interval $\langle L, \infty \rangle$)

tail =-1 alebo **'left'** (t.j. interval $\langle -\infty, P \rangle$)

sig is the probability that the observed value of Z could be as large or larger by chance under the null hypothesis that the mean of x is equal to m.

ci je 1- alpha interval spoľahlivosti (confidence interval for the true mean).

```
>> x=[22.4,28.0,20.1,27.4,23.9,24.8,26.4,27.0,25.4,25.6];
```

```
>> [muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(x,0.05)
```

muhat =

25.1000

sigmahat =

2.4304

muci =

23.3614

26.8386

$$\mu \in \langle 23,3614; 26,8386 \rangle$$

sigmaci =

1.6717

4.4369

$$\sigma \in \langle 1,6717; 4,4369 \rangle$$

Alebo

```
>> m=mean(x);[h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,0)      % tiež [h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,'both')  
h = 0  
sig = 1  
ci = 23.3614 26.8386 % je to 95 % - ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú  
hodnotu
```

Navyše jednostranné intervaly spoľahlivosti, pre strednú hodnotu a zadané hodnoty, dostaneme podobným spôsobom:

```
>> m=mean(x);[h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,1)      % tiež [h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,'right')  
h =  
0  
sig = 0.5000  
ci = 23.6912 Inf  
>> m=mean(x);[h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,-1)     % tiež [h,sig,ci] = ttest(x,m,0.05,'left')  
h = 0  
sig = 0.5000  
ci = -Inf 26.5088
```