

Limita funkcie a spojitosť funkcie

Cieľ

Pochopenie veľmi dôležitých pojmov, ako sú limita funkcie a spojitosť funkcie, ktoré budú základom pre zvládnutie ďalších kapitol.

Otázky

Vyslovte definíciu limity funkcie (str.27 a str.25).

Uveďte príklady funkcií kedy existuje limita funkcie a kedy neexistuje limita funkcie.

Vyslovte definíciu spojitosti funkcie v bode a na intervale (str.19).

Aké body nespojitosti poznáte. Ako vyzerajú grafy takýchto funkcií (str.22)?

Uveďte pravidla pre výpočet limit (str.18-19).

Uveďte príklad konvergentnej a divergentnej postupnosti. Limitou akej postupnosti je číslo e (str.23).

Uveďte niektoré vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale (str.20).

Dôležité limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,718281\dots, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^k = 1 \text{ pre každé } k$$

Príklad 1

Nájdite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie

Po dosadení do daného výrazu $x=1$ dostávame “bez problémov” $\frac{1^2 - 9}{1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{-8}{2} = -2$.

Teda, ak je funkcia v bode spojitá a má limitu, potom limita je rovná funkčnej hodnote v danom bode.

Príklad 2

Nájdite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie

Po dosadení $x=3$ do danej funkcie dostávame $\frac{3^2 - 9}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{0}{0}$ čo je neurčitý výraz. Je to nič

podobné ako vo funkcii $f(x) = \frac{x}{x}$. Táto funkcia nie je definovaná v bode $x=0$ a všade okrem

tohoto bodu je rovná funkcii $g(x) = 1$ čo je spojitá funkcia. Podobne môžeme postupovať

v našom prípade. Danú funkciu vyjadríme v tvare $\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$ a v okolí bodu $x=3$

nahradíme túto funkciu spojitou funkciou $\frac{(x+3)}{(x-2)}$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = 6.$$

Príklad 3

Nájdite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie

Danú funkciu pod limitou môžeme upraviť takto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 5\frac{x}{x^2} + 6\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 9\frac{1}{x} \bullet \frac{1}{x}}{1 - 5\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x} \bullet \frac{1}{x}} = \frac{1 - 9 \bullet 0 \bullet 0}{1 - 5 \bullet 0 + 6 \bullet 0 \bullet 0} \text{ pretože}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Teda } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 1.$$

Príklad 4

Rozhodnite či funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} & \text{pre } x \neq 3, \\ 158 & \text{pre } x = 3. \end{cases}$$

Riešenie

Z Príkladu 2 vieme, že $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 6 \neq 158$, teda daná funkcia nie je spojitá v bode 3,

ale bola by spojitá keby jej funkčná hodnota v bode 3 bola 6 a nie 158.

Príklad 5

$$\text{Nájdite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}.$$

Riešenie

Danú limitu si upravíme takto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7.5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}. \text{ Ak zavedieme substitúciu } u = 5x, \text{ potom ak } x \rightarrow 0, \text{ tak aj}$$

$u \rightarrow 0$ a danú limitu môžeme vyjadriť v tvare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \lim_{u \rightarrow 0} 7.5 \cdot \frac{\sin u}{u} = 7.5 \cdot 1 = 35.$$

Príklad 6

$$\text{Nájdite } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{5x}.$$

Riešenie

Danú limitu si môžeme vyjadriť v tvare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x} \right)^{5x}}{\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{5x}}.$$

Vypočítame si teraz ako pomocný príklad $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x$. Položíme $\frac{k}{x} = \frac{1}{y}$ odtiaľ

dostaneme $x = ky$ a ak k je kladné, tak pre $x \rightarrow +\infty$ je aj $y \rightarrow +\infty$. Dostávame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{ky} = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^k = e^k.$$

V našom prípade dostávame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{5x}}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x}} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right)^5}{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x\right)^5} = \left(\frac{e^2}{e^3}\right)^5.$$

Použitie MAPLU

Niektoré príklady, ktoré sme riešili môžeme riešiť použitím známych matematických softverov, ako napríklad MAPLE.

Ø b :=Limit(7*sin(5*x)/x, x=0);

$$b := \lim_{x \rightarrow 0} 7 \frac{\sin(5x)}{x}$$

> b :=limit(7*sin(5*x)/x, x=0);

$$b := 35$$

> b2 :=Limit(((x+2)/(x+3))^{5*x}, x=infinity);

$$b2 := \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{5x}$$

> b2 :=limit(((x+2)/(x+3))^{x*5}, x=infinity);

$$b2 := e^{(-5)}$$

> b3 :=Limit((sqrt(2+x)-sqrt(2))/x, x=0);

$$b3 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$$

> b3 :=limit((sqrt(2+x)-sqrt(2))/x, x=0);

$$b3 := \frac{1}{4} \sqrt{2}$$