

Funkcia

Cieľ

Zvládnuť základných vlastností funkcií

Otázky

Definujte funkciu jednej premennej (str.9).

Uveďte príklady funkcie rastúcej, klesajúcej, nerastúcej, neklesajúcej (str.10).

Uveďte príklady párnej a nepárnej funkcie. Je pravdivý výrok: Ak funkcia je nepárna, tak je párna (str.10)?

Uveďte (aj graficky) príklady periodických funkcií (str.10).

Čo rozumiete pod pojmom inverzná funkcia k danej funkcii (str.11).

Uveďte základné vlastnosti elementárnych funkcií (str.11-14).

Príklad 1

Nech je daná funkcia $f(x) = x^2, x \in (0,1)$ a funkcia $g(x) = x^2$.

1. Je $f(x) = g(x)$?
2. Je funkcia $f(x)$ párna?
3. Existujú inverzné funkcie k daným funkciám?

Riešenie

1. Funkcie sa nerovnajú, pretože majú rôzne obory definície.
2. Funkcia $f(x)$ nie je párna, pretože napríklad $x=0,5$ je z oboru definície ale $x=0,5$ nie je z oboru definície funkcie $f(x)$.
3. K funkcii $g(x)$ existuje inverzná funkcia, ktorú nájdeme takto:

$g(x) = y = x^2$ a pre $x \in (0,1)$ vieme jednoznačne vypočítať $x = \sqrt{y}$ pre $y \in (0,1)$.

Výmenou x za y dostávame $y = g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Príklad 2

Nájdite obor definície funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Riešenie

Funkcia $\sqrt{\quad}$ je definovaná pre nezáporné hodnoty argumentu (≥ 0). Teda riešením budú také x , pre ktoré bude výraz $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Riešením rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$ sú $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$. Teda všade na intervale $(-\infty, \infty)$ okrem čísel 2 a 3 daný výraz má rovnaké znamienko. Stačí zistiť hodnotu $x^2 - 3x + 2$ na čiastočných intervaloch $I_1 = (-\infty, 2), I_2 = (2, 3), I_3 = (3, \infty)$ v jedinom bode z daných intervalov. Napríklad pre $x = 0 \in I_1$ dostávame $0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Teda na celom prvom intervale je daný výraz kladný, čiže celý interval patrí do oboru definície danej funkcie. Pretože hodnota daného výrazu je v bode $x=2$ nulová patrí tam aj $x=2$. Teda všetky body z intervalu $(-\infty, 2]$ sú z oboru definície danej funkcie. Podobne sa môžeme presvedčiť, že aj body z intervalu $[3, \infty)$ sú z oboru definície funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Príklad 3

Nájdite obor definície funkcie $f(x) = \frac{3x-158}{\sqrt{x^2-3x+2}} + x^2 \arcsin \frac{x-1}{3}$.

Riešenie.

V prvej funkcii menovateľ musí byť rôzny od nuly, ale zároveň výraz pod odmocninou (je to párna funkcia) musí byť nezáporný. Teda do oboru definície prvej funkcie budú patriť všetky hodnoty pre ktoré bude výraz $x^2 - 3x + 2 > 0$. Z príkladu 3 vieme, že je to zjednotenie intervalov $(-\infty, 1), (2, \infty)$.

Oborom definície funkcie $\arccos u$ sú hodnoty $-1 \leq u \leq 1$ (pozri skr. str. 14 Cyklometrické funkcie). Oborom definície funkcie x^2 je \mathbb{R} . Teda musí byť $-1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1$. Po vynásobení s 3 dostávame $-3 \leq x-1 \leq 3$ a po úprave dostávame $-2 \leq x \leq 4$. Teda do oboru definície celej funkcie budú patriť tie hodnoty, ktoré sú spoločné pre obe funkcie (prienik oborov definície prvej a druhej funkcie). Teda budú to hodnoty z intervalov $[-2, 1) \cup (2, 4]$.