

Priebeh funkcie

Cieľ

Skúmanie vlastností funkcie pomocou derivácie funkcie.

Otázky

Ako môžete pomocou derivácie funkcie zistiť:

- či je monotónna, konvexná, konkávna (str.39-41),
- extrémny funkcie, inflexný bod (str.40-41).

Aké poznáte asymptoty grafu funkcie (str.42)?

Uveďte na príklade použitie derivácií vyšších rádov (str.41).

Ako je definovaná funkcia daná parametricky, ako sa vypočíta derivácia funkcie danej parametricky (ukážte na príklade) (str.43-44).

Príklad 1

Kus drôtu s dĺžkou a máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do tvaru štvorca a druhá do tvaru kruhu. Na ktorom mieste treba urobiť rez, aby súčet obsahu štvorca a obsahu kruhu bol najmenší?

Riešenie

Ak si označíme veľkosť strany štvorca písmenom x a veľkosť polomeru kruhu r , tak

dostávame $O_{\text{štvorca}} = 4x$, $O_{\text{kruhu}} = 2pr$, $P_{\text{štvorca}} = x^2$, $P_{\text{kruhu}} = pr^2$. Potom platí

$a = 4x + 2pr$, $P = x^2 + pr^2$, kde P je plošný obsah útvaru pozostávajúceho z kruhu a štvorca. Dostávame

$x = \frac{a - 2pr}{4}$ a po dosadení do P dostávame $P = \frac{(a - 2pr)^2}{16} + pr^2$ čo je už iba funkcia jednej

premennej a to polomeru kruhu. Teda môžeme písať $P(r) = \frac{(a - 2pr)^2}{16} + pr^2$. Pretože funkcia

má dobré vlastnosti (je diferencovateľná, spojitá) má extrém v bode v ktorom je jej prvá

derivácia rovná nule. Dostávame $P'(r) = \frac{2(a - 2pr)(-2p)}{16} + 2pr = 0$. Riešením rovnice

dostávame $r = \frac{a}{2p + 8}$. Po dosadení do výrazu $x = \frac{a - 2pr}{4}$ dostaneme $x = \frac{a}{p + 4}$. Pretože

$P''(r) = P''\left(\frac{a}{p + 4}\right) = \frac{p^2}{2} + 2p > 0$ vypočítané rozmery štvorca a kruhu udávajú riešenie danej

úlohy, teda kus drôtu rozdelíme na časti $4x$, $2pr$.

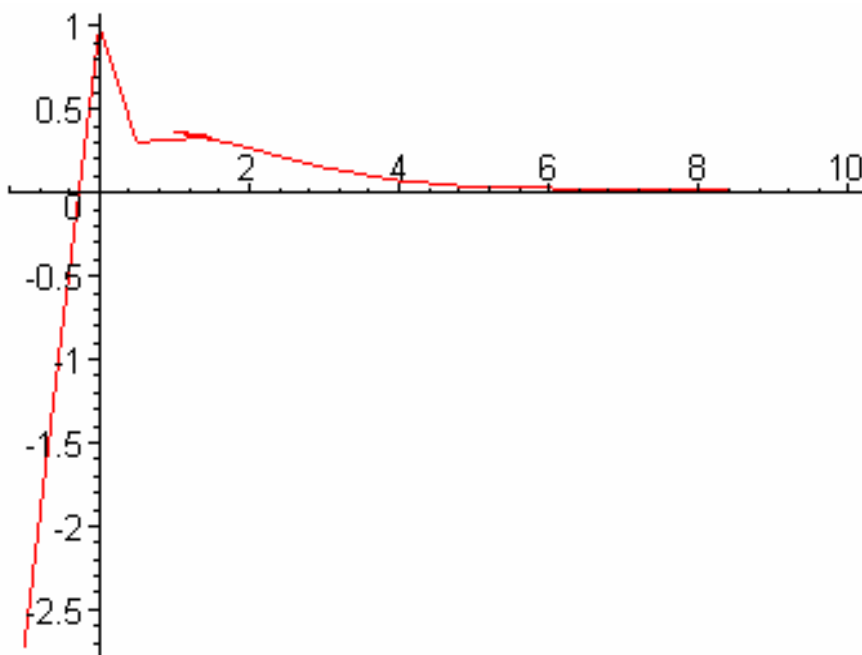
Príklad 2

Nájdite priebeh funkcie $f(x) = xe^{-x}$ a zostrojte jej graf.

Riešenie

Najsamprv sa pokúsime zostrojiť niekoľko bodov grafu danej funkcie. Je zrejmé, že oborom definície danej funkcie je množina $D(f) = (-\infty, \infty)$. Tieto body pospájame úsečkami.

Dostaneme v danej časti približne graf danej funkcie.



”Zhruba vieme aký má tvar” graf danej funkcie. Z grafu usudzujeme, že funkcia nemôže byť periodická a ani párna, resp. nepárna. Teraz použitím derivácií určíme presnejšie niektoré vlastnosti danej funkcie. Dostávame $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Pretože daná funkcia je spojitá na celom obore definície je $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$, pre $x = 1$. Teda na intervaloch $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ prvá derivácia nemení znamienko. Pretože $f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1 > 0$, funkcia je rastúca na celom intervale $(-\infty, 1)$. Podobne $f'(2) = (1-2)e^{-2} = -1e^{-2} < 0$, je funkcia klesajúca na $(1, \infty)$.

Podobne $f''(x) = (x-2)e^{-x} = 0$ pre $x = 2$. Pretože $f''(0) = (0-2)e^{-0} = -2 < 0$ je druhá derivácia danej funkcie záporná na celom intervale $(-\infty, 2)$ a teda je na tomto intervale konkávna. Podobne zistíme, že a $f''(3) = (3-2)e^{-3} = 1e^{-3} > 0$, teda funkcia je na intervale $(2, \infty)$ konvexná.

V bode $x = 1$ je druhá derivácia záporná a pretože prvá derivácia bola nulová, funkcia má v tomto bode lokálne maximum $= 1.e^1$.

V bode $x = 2$ funkcia prechádza z konkávnej na konvexnú a teda funkcia má v bode $(2, 2.e^{-2})$ inflexný bod.

Teraz vyšetríme asymptoty grafu funkcie. Pretože funkcia má spojitú všade prvú derivácia nemá asymptoty bez smernice. Ak priamka $y = k_1x + q_1$ je asymptotou grafu funkcie potom

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, q_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1x). \text{ Výpočtom dostávame}$$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty, \text{ teda limita je nevlastná a graf funkcie}$$

pre $x \rightarrow -\infty$ nemá asymptotu.

Ak priamka $y = k_2x + q_2$ je asymptotou grafu funkcie potom

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, q_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k_2x). \text{ Výpočtom dostávame}$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \text{ a}$$

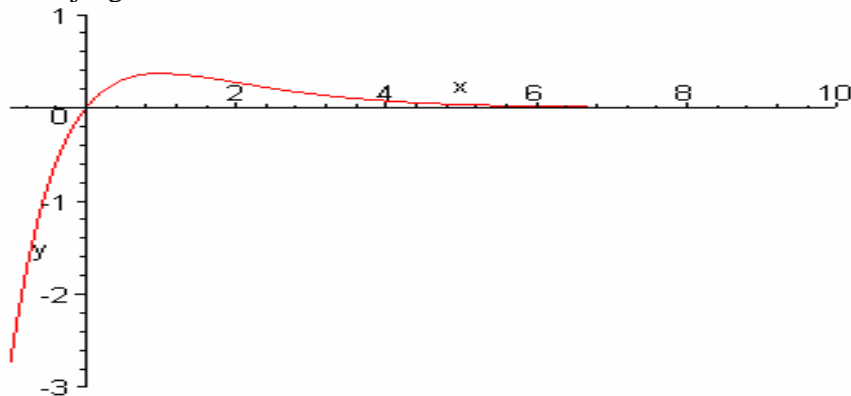
$$q_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{-x} - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Teda priamka $y = k_2 x + q_2 = 0 \cdot x + 0$ je asymptotou grafu funkcie so smernicou.

S využitím získaných údajov môžeme presnejšie zostrojiť graf danej funkcie.

Presnejší graf funkcie má tvar



Príklad 3

Nájdite rovnicu dotyčnice ku kružnici danej parametrickými rovnicami $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ v

bode $t = \frac{p}{4}$.

Riešenie

Rovnica dotyčnice má tvar $y - y_0 = k(x - x_0)$. V našom prípade je

$$x_0 = 2 \cos \frac{p}{4} = \sqrt{2}, y_0 = 2 \sin \frac{p}{4} = \sqrt{2} \text{ a } k = \frac{(2 \sin t)'}{(2 \cos t)'} \text{ pre } t = \frac{p}{4}. \text{ Teda } k = \frac{2 \cos \frac{p}{4}}{-2 \sin \frac{p}{4}} = -1 \text{ a}$$

priamka $y - \sqrt{2} = -1 \cdot (x - \sqrt{2})$ je hľadanou dotyčnicou.