

Derivácia a jej použitie

Cieľ

Pochopenie geometrického a fyzikálneho významu derivácie funkcie a schopnosť výpočtu derivácií funkcií.

Otázky

- Definujte deriváciu funkcie v bode a vysvetlite jej geometrický význam (str.27).
- Uveďte základné pravidlá pre výpočet derivácie (str.29).
- Uveďte vzorce pre derivácie elementárnych funkcií (str.30).
- Čo rozumiete pod pojmom diferenciál funkcie (str.31)?
- Uveďte kedy môžete použiť L'Hospitalovo pravidlo (ukážte jeho použitie na jednoduchom príklade) (str.33-34).
- Ako môžete aproximovať funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ pomocou Taylorovej vety (str.35-36).

Príklad 1

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = 5\sqrt{x^3} - 6\arctg x + 2\sin x - 158$.

Riešenie

Najskôr sa pozrieme na základné vzorce. Vidíme, že medzi nimi nemáme “priamo uvedený” vzorec pre odmocniny, preto danú funkciu si upravíme

$f(x) = 5x^{\frac{3}{2}} - 6\arctg x + 2\sin x - 158$. Teraz už môžeme použiť základné vzorce. Dostávame

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 6\frac{1}{1+x^2} + 2\cos x - 0.$$

Príklad 2

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \ln x \sin x + \frac{2^x}{\cos x}$.

Riešenie

Pozri pravidla pre derivovanie súčinu a podielu str.29. Použitím uvedených pravidiel dostávame

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)' + \frac{(2^x)' \cos x - 2^x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{1}{x} \sin x + \ln x \cos x + \frac{2^x \ln 2 \cos x - 2^x (-\sin x)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Riešenie

$$f'(x) = \frac{1}{x} \sin x + \ln x \cos x + \frac{2^x \ln 2 \cos x - 2^x (-\sin x)}{(\cos x)^2}.$$

Príklad 3

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sin 2x + \sin^2 x + \sin x^2$.

Riešenie

Použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie $F(x) = f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$. Daná funkcia je súčtom troch funkcií a jej derivácia bude rovná súčtu derivácií jednotlivých funkcií. Deriváciu $F_1(x) = \sin 2x$ vypočítame takto. Položíme $u = 2x$, potom

$$\frac{dF_1}{dx} = \frac{dF_1}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \frac{d(2x)}{dx} = \cos u \cdot 2 = 2\cos 2x.$$

Podobne dostávame

$$\frac{dF_2}{dx} = \frac{dF_2}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d[(u)^2]}{du} \frac{d(\sin x)}{dx} = 2u^1 \cos x = 2 \sin x \cos x.$$

$$\frac{dF_3}{dx} = \frac{dF_3}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d[(\sin u)]}{du} \frac{d(x^2)}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

Výsledok je súčtom derivácií jednotlivých funkcií.

Teda $F'(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin x \cos x + 2x \cos x^2$.

Príklad 4

Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ v bode $P=(0, ?)$.

Riešenie

Druhá súradnica bodu je hodnota funkcie $f(0) = e^{-0} \cos 2 \cdot 0 = 1$. Teda $P=(0,1)$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode $P = (x_0, f(x_0))$ je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ a rovnica normály je } y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$f'(x) = -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x$ a $f'(0) = -e^{-0} \cos(2 \cdot 0) - 2e^{-0} \sin(2 \cdot 0) = -1$. Teda rovnica dotyčnice je

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \text{ a rovnica normály je } y - 1 = \frac{-1}{-1}(x - 0).$$

Príklad 5

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x})$.

Riešenie

Táto limita je typu $\infty - \infty$ preto danú funkciu upravíme do vhodnejšieho tvaru

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x \sin x - \cos x}{x \cos x}) \text{ upravená limita je typu } \frac{0}{0} \text{ a}$$

pretože existujú nasledujúce limity platí:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x \sin x - \cos x}{x \cos x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x - \cos x)'}{(x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{2 \sin 0 + 0 \cdot \cos 0}{\cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = 0. \end{aligned}$$

Použitie MAPLU

```
> F(x) := sin(2*x) + [sin(x)]^2 + sin(x^2);
```

$$F(x) := \sin(2x) + [\sin(x)]^2 + \sin(x^2)$$

```
>
```

```
Diff(sin(2*x) + [sin(x)]^2 + sin(x^2), x) = diff(sin(2*x) + [sin(x)]^2 + sin(x^2), x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sin(2x) + [\sin(x)]^2 + \sin(x^2)) = 2 \cos(2x) + 2 [\sin(x)] [\cos(x)] + 2 \cos(x^2) x$$

```
> Diff(x*arcsin(x) + sqrt(1-x^2), x) = diff(x*arcsin(x) + sqrt(1-x^2), x);
```

```
>
```

$$\frac{\partial}{\partial x} (x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}) = \arcsin(x)$$

```
> Diff(ln((5+4*x)/(3+7*x)) + x*10^(-x), x) = diff(ln((5+4*x)/(3+7*x)) + x*10^(-x), x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \left(\frac{5+4x}{3+7x} \right) + x 10^{(-x)} \right) =$$

$$\left(4 \frac{1}{3+7x} - \frac{7(5+4x)}{(3+7x)^2} \right) (3+7x) + 10^{(-x)} - x 10^{(-x)} \ln(10)$$