TESTY
Test

1. Ktorá z nasledujúcich matíc
   a) $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t + \cos t \\ -\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$;
   b) $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$;
   c) $\begin{pmatrix} \cos t & 2\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$,

   je fundamentálnou maticou riešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?
2. Ktorý zo systémov dvoch homogénnych diferenciálnych rovníc prvého rádu $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde
   a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   má fundamentálnu maticu riešení $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{i.t} & e^{-i.t} \\ ie^{i.t} & -ie^{-i.t} \end{pmatrix}$?
3. Ktorý z nasledujúcich vektorov
   a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   je vlastným vektorom matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$?
4. Ktorá z matíc
   a) $e^{3.t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$; b) $e^{2.t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$; c) $e^{3.t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$,

   je exponenciálom matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$?
5. Ktorá z nasledujúcich diferenciálnych rovníc
   a) $x'' - px' + qx = 0$; b) $x'' + px' + qx = 0$; c) $x'' + px' - qx = 0$,

   je ekvivalentná so systémom $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$?
6. Ktoré z nasledujúcich tvrdení je správne? Matica $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú podobné vtedy a len vtedy ak existuje:
   a) singulárna matica $\mathbf{T}$ taká, že $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}$;
   b) regulárna matica $\mathbf{T}$ taká, že $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
   c) regulárna matica $\mathbf{T}$ taká, že $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}$.

7. Nech $\mathbf{U}$ je fundamentálnou maticou riešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Potom partikulárne riešenie $x(t)$
   a) môže byť vždy vyjadrené,
   b) nemôže byť vždy vyjadrené,
   v tvare

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{U}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau\,?$$

8. Nech $\mathbf{U}$ je fundamentálna matica riešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Nech $\mathbf{x}^*$ je nejaké riešenie systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$. Môže $\mathbf{x}^*$ byť vyjadrené v tvare

   a) $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{U}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau$;

   b) $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau$;

   c) $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{U}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{b}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau$?

Test

1. Nech $\lambda = a + i.b = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je riešením charakteristickej rovnice pre nejakú homogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu. Odpovedajúce riešenia sú dané vzťahmi
   a) $x_1(n) = a^n, x_2(n) = b^n$;
   b) $x_1(n) = \cos\varphi n, x_2(n) = \sin\varphi n$;
   c) $x_1(n) = \rho^n \cos\varphi n, x_2(n) = \rho^n \sin\varphi n$;
   d) $x_1(n) = \rho^n \cos^n\varphi, x_2(n) = \rho^n \sin^n\varphi$?

2. Nech $\lambda_i \in R$ je k násobný koreň charakteristickej rovnice, odpovedajúcej nejakej lineárnej homogénnej diferenčnej rovnice. Ktorá z nasledujúcich množín funkcií
   a) $\lambda^n, n\lambda^n, ..., n^k\lambda^n$;
   b) $e^{\lambda n}, ne^{\lambda n}.., n^{k-1}e^{\lambda n}$;
   c) $\lambda^n, n\lambda^n, ..., n^{k-1}\lambda^n$,
   je časťou fundamentálneho systému riešení príslušnej diferenčnej rovnice, ktorá odpovedá $\lambda_i \in R$?

3. Ktorá z funkcií
   a) $x(n) = C_1 3^n + C_2 4^n$;
   b) $x(n) = C_1(3^n + 4^n) + C_2 4^n$;
   c) $x(n) = C_1 3^{n+1} + 5C_2 4^n$,
   je všeobecným riešením rovnice $x(n+2) - 7x(n+1) + 12x(n) = 0$?

4. Ktorá z rovníc
   a) $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 0$;
   b) $x(n+2) - x(n) = 0$;
   c) $x(n+2) - x(n+1) = 0$,
   má všeobecné riešenie $x(n) = C_1 + C_2 n$?

5. Pre ktorú z rovníc
   a) $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$;
   b) $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n)$,

   je $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ charakteristickou rovnicou?

6. Ktorý zo vzťahov
   a) $\mathbf{A}^n = Z^{-1}\left\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$;

b) $\mathbf{A}^n = Z^{-1}\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})z\}$;

c) $\mathbf{A}^n = Z^{-1}\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z\}$,

je fundamentálnou maticou pre systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n)$? Z^{-1} - je inverzná Z -transformácia.

3.8. KONTROLNÉ OTÁZKY

1. Vyplýva z asymptotickej stability riešenia jeho stabilita?
   a) Áno
   b) Nie
   c) Niekedy

2. Plynie z ohraničenosti riešenia jeho stabilita?
   a) Áno
   b) Nie

3. Vyplýva zo stability riešenia jeho ohraničenosť?
   a) Áno
   b) Nie

4. Sú všetky riešenia nelineárneho systému súčasne buď stabilné alebo nestabilné?
   a) Áno
   b) Nie

5. Stacionárny bod systému *n* homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi je asymptoticky stabilný ak
   a) všetky korene charakteristickej rovnice majú zápornú reálnu časť,
   b) aspoň jeden koreň má zápornú reálnu časť,
   c) všetky korene majú zápornú imaginárnu časť.

6. Nulové riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice *n*-tého rádu s konštantnými koeficientmi je nestabilné ak
   a) aspoň jeden koreň charakteristickej rovnice má kladnú reálnu časť,
   b) charakteristická rovnica nemá reálne korene.

4.8. REVIEW QUESTIONS

1. Ktorá z nasledujúcich rovníc
   a) $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$;
   b) $F_{x'} - \frac{d}{dt} F_x = 0$;
   c) $F_x - F_{tx'} - F_{xx'} x' - F_{x'x'} x'' = 0$,

   je Eulerova rovnica pre funkcionál $v[x(t)] = \int_a^b F(t, x, x')dt$?

2. Ktorá z podmienok
   a) $\delta v = 0$;
   b) $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$;

c) $F_{x_j} - \frac{d}{dt} F_{x'_j} = 0, \quad j = 1,2,...,n$

je nutnou podmienkou pre existenciu lokálnych extrémov funkcionálov?

3. Je systém kriviek $x(t) = Ct^2$ na $\langle -1,1 \rangle$
   a) centrálnym poľom;
   b) vlastným poľom?

4. Ktorá z podmienok
   a) $F_{xx'} \geq 0$;
   b) $F_{xx'} \leq 0$;
   c) $F_{x'x'} \geq 0$;
   d) $F_{x'x'} \geq 0$,

   je postačujúcou podmienkou (Lagrange) pre existenciu lokálneho minima funkcionálu

$$v[x(t)] = \int_a^b F(t, x, x')dt \ ?$$

ODPOVEDE NA OTÁZKY

KAPITOLA 1

1. a) aj b);
2. a);
3. a) aj c);???
4. c);
5. b);
6. len ak $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{E}$;
7. a).

KAPITOLA 2

c) , b) pre $\rho = 1$;
c);
všetky;
a);
všetky;
c).

KAPITOLA 3

a) (pozri obe definície)
b) (pozri príklad 3.2.2.)
b) (pozri príklad 3.2.1.)
b) (pozri príklad 3.2.4.).
a) (pozri Vetu 3.3.1.)
a) (pozri Vetu 3.6.1.)

KAPITOLA 4

a) aj c);

a) pre všetky, ak existuje δv; b) ak existuje δv pre $v[x(t)] = \int_a^b F(t, x, x')dt$;

c) ak existuje δv pre $v[\mathbf{x}(t)] = \int_a^b F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')dt$, kde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$;

a);

d) ak F je trikrát diferencovateľná vzhľadom na x'.