5.8 Stabilita riešení diferenčných rovníc

Nech je daná lineárna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientmi

$$x(n+k)+a_1x(n+k-1)+...+a_kx(n)=0, \qquad (5.8.1)$$

kde $a_k \neq 0$ a $x(n)$ je neznáma funkcia. Budeme vyšetrovať stabilitu nulového riešenia (5.8.1).Teória stability riešenia diferenčných rovníc je podobná teórii diferenciálnych rovníc. Zodpovedajúca charakteristická rovnica je

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0, \qquad (5.8.2)$$

Chceme aby pre body $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ $(t_0, \mathbf{z}(t_0))$, ktorých vzdialenosť je malá boli aj riešenia **x** **z** navzájom blízke na celom intervale (t_0, ∞).

Definícia *Riešenie $x^*(n)$ rovnice (5.8.1) spĺňajúce začiatočné podmienky*

$$x^*(0)=x_0^*,...,x^*(k-1)=x_{k-1}^*,$$

sa nazýva stabilné riešenie ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ také, že pre každé riešenie $x(n)$ systému (5.8.1) spĺňajúce počiatočné podmienky

$$x(0)=x_0,...,x^*(k-1)=x_{k-1},$$

z platnosti nerovnosti

$$\left|x_0 - x_0^*\right| < \delta, ..., \left|x_{k-1} - x_{k-1}^*\right| < \delta \qquad (5.8.3)$$

vyplýva platnosť

$$\left|x(n) - x^*(n)\right| < \varepsilon, \qquad (5.8.4)$$

pre každé $n \geq 0$.

Voľnejšie povedané stabilita znamená, že ak počiatočné hodnoty riešení sú blízke tak potom aj samotné riešenia sú blízke.

Definícia *Riešenie $x^*(n)$ rovnice (5.8.1) sa nazýva nestabilné ak pre ľubovoľné malé $\delta > 0$ podmienka (5.8.4) nie je splnená pre niektoré riešenie $x(n)$.*

Definícia *Riešenie $x^*(n)$ rovnice(5.8.1) sa nazýva asymptoticky stabilné ak z podmienky (5.8.3) okrem (5.8.4) vyplýva aj podmienka*

$$\lim_{n\to\infty}\left[x(n) - x^*(n)\right] = 0.$$

Nasledujúci výsledok poskytuje jednoduché kritérium na určenie stability.

Veta 5.8.1 *Ak*

1) *všetky korene charakteristickej rovnice (5.8.2) spĺňajú*

$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1,...,k,$

potom nulové riešenie (5.8.1) je asymptoticky stabilné.

2) *amplitúda aspoň jedného koreňa charakteristickej rovnica (5.8.2) je väčšia ako 1, potom nulové riešenie (5.8.1) je nestabilné.*

3) *všetky korene (5.8.2) sú jednoduché pričom* $|\lambda_i| = 1$ *a pre ostatné korene je* $|\lambda_j| < 1$, *potom nulové riešenie (5.8.1) je stabilné.*

4) *Aspoň jeden koreň (5.8.2) je násobný a* $|\lambda_i| = 1$, *potom nulové riešenie (5.8.1) je nestabilné.*

Príklad *Vyšetrite stabilitu nulového riešenia*

$$x(n+2) - 2x(n+1) + 5x(n) = 0.$$

Riešenie: Odpovedajúca charakteristická rovnica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

má komplexné korene $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, pričom amplitúdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{5} > 1$. Teda nulové riešenie je nestabilné.

Príklad Pomocou MATLABu zistíme či všetky korene charakteristických rovníc odpovedajúcich diferenčným rovniciam:

a) $x(n+2) - 0{,}3x(n+1) + 0{,}02x(n) = 0$,

b) $x(n+2) - 2x(n+1) + 5x(n) = 0$,

c) $x(n+3) - 1{,}3x(n+2) + 2{,}3x(n+1) - 0{,}2x(n) = 0$,

ležia v jednotkovom kruhu so stredom v začiatku súradného systému.

Riešenie:

a)

```
>> r=[1 -0.3 0.02]
r =
   1.0000   -0.3000    0.0200

>> y = all(abs(roots(r)) < 1)
y =
    1
```

Výsledok $y = 1$ potvrdzuje, že všetky korene danej rovnice ležia v požadovanom jednotkovom kruhu.

```
>> roots(r)
ans =
   0.2000
   0.1000
```

b)

```
>> r=[1 -2 5]
rov =
```

```
    1    -2     5
>> y = all(abs(roots(r)) < 1)
y =
     0
```

Výsledok $y = 0$ potvrdzuje, že niektoré korene danej rovnice ležia mimo jednotkového kruhu alebo ležia na jednotkovej kružnici.

```
>> roots(r)
ans =
   1.0000 + 2.0000i
   1.0000 - 2.0000i
```

c)

```
>> r=[1 -1.3 0.32 -0.02]
r =
    1.0000   -1.3000    0.3200   -0.0200

>> y = all(abs(roots(r)) < 1)
y =
     0
```

Výsledok $y = 0$ potvrdzuje, že niektoré korene danej rovnice ležia mimo jednotkového kruhu alebo ležia na jednotkovej kružnici.

```
>> roots(r)
ans =
    1.0000
    0.2000
    0.1000
```

Z teórie komplexnej funkcie je známe, polynóm

$$P_k(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k$$

sa transformáciou

$$\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$$

zmení na polynóm

$$Q_k(\omega) = (\omega+1)^k + a_1(\omega+1)^{k-1}(\omega-1) + \ldots + a_{k-1}(\omega+1)(\omega-1)^{k-1} + a_k(\omega-1)^k$$

s nasledujúcou vlastnosťou: Ak pre každý koreň rovnice $P_k(\lambda) = 0$ je $|\lambda| < 1$, potom $\mathrm{Re}\,\omega < 0$, pre každý koreň rovnice $Q_k(\omega) = 0$.

Použitím Hurwitzovho kritéria môžeme teda vyšetrovať stabilitu systému diferenčných rovníc.

Poznámka Veta 5.8.1 môže byť použitá na určenie stability alebo asymptotickej stability nulového riešenia systémov diferenčných rovníc. Ako uvidíme z nasledujúceho príkladu nulové riešenie systému diferenčných rovníc môže byť stabilné (niekedy) dokonca aj keď λ_i je viacnásobný charakteristický koreň s amplitúdou $|\lambda_i| = 1$.

Príklad *Zistime či nulové riešenie nasledujúceho systému* $x(n+1) = x(n), y(n+1) = y(n)$ *je stabilné.*

Riešenie: Charakteristická rovnica má korene $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Všeobecné riešenie je $x(n) = C_1, y(n) = C_2$. Ak $x^*(n) = C_1^*, y^*(n) = C_2^*$ je riešenie daného systému a $|x(0) - x^*(0)| < \delta$, $|y(0) - y^*(0)| < \delta$, potom pre každé $n \in \mathbf{N}$ je

$$|x(n) - x^*(n)| < \delta = \varepsilon, \quad |y(n) - y^*(n)| < \delta = \varepsilon.$$

Preto nulové riešenie daného systému je stabilné.