5.7 Stabilita lineárnych diferenciálnych rovníc a systémov

V tejto časti budeme vyšetrovať stabilitu triviálneho (nulového) riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu s konštantnými koeficientmi:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \quad a_0 > 0. \tag{5.7.1}$$

Stabilitu triviálneho riešenia ($y \equiv 0$) rovnice (5.7.1) budeme vyšetrovať pomocou prepisu (5.7.1) na systém lineárnych diferenciálnych rovníc. Platí nasledujúca veta:

Veta *Nech*

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0, \quad (a_0 > 0) \tag{5.7.2}$$

je odpovedajúca charakteristická rovnica pre (5.7.1). Ak

1. *všetky korene rovnice (5.7.2) majú záporne reálne časti, potom nulové riešenie rovnice (5.7.1)je asymptoticky stabilné.*
2. *Aspoň jeden koreň (5.7.2) má kladnú reálnu časť, potom nulové riešenie rovnice (5.7.1) je nestabilné.*
3. *všetky korene (5.7.2) majú nekladnú reálnu časť pričom korene s nulovou reálnou časťou sú jednoduché, potom nulové riešenie rovnice (5.7.1)je stabilné.*
4. *Všetky korene (5.7.2) s nulovou reálnou časťou nie sú jednoduché, potom nulové riešenie rovnice (5.7.1)je nestabilné.*

Teraz uvedieme Routh-Hurwitzovo kritérium na zistenie či všetky korene (5.7.2) majú záporné reálne časti..

Veta *Všetky korene rovnice* (5.7.2) *majú záporné reálne časti vtedy a len vtedy ak všetky hlavné minory Hurwitzovej matice:*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ ..... & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{bmatrix} \tag{5.7.3}$$

sú kladné a $a_0 > 0$.

Hurwitzova matica je vytvorená nasledovne. Koeficienty polynómu (5.7.2), od a_1 po a_n sú napísané na hlavnú diagonálu. Stĺpce obsahujú len koeficienty s párnym alebo nepárnym indexom, pričom prvky matice zodpovedajúce koeficientom s indexom väčším ako n alebo menším ako 0 sú nulové.

Pre rovnicu (5.7.1) štvrtého rádu sú hlavné minory Hurwitzovej matice:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Príklad *Rozhodnite o stabilite nulového riešenia diferenciálnej rovnice*

$$y'' + 4y' + 5y = 0. \tag{5.7.4}$$

Riešenie: Charakteristická rovnica pre (5.7.4) je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

a má korene $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ so zápornou reálnou časťou. Preto nulové riešenie diferenciálnej rovnice (5.7.4) je asymptoticky stabilné.
Korene charakteristickej rovnice vieme bez problémov vypočítať pomocou matematických softvérov, teda nemusíme Routh-Hurwitzovo kritérium nutne používať. Vhodnosť použitia Hurwitzovho kritéria si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad V rovine parametrov α, β nájdime oblasti v ktorých je stabilné nulové riešenie systému diferenciálnych rovníc

$$x' = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y,$$
$$y' = x - \beta y.$$

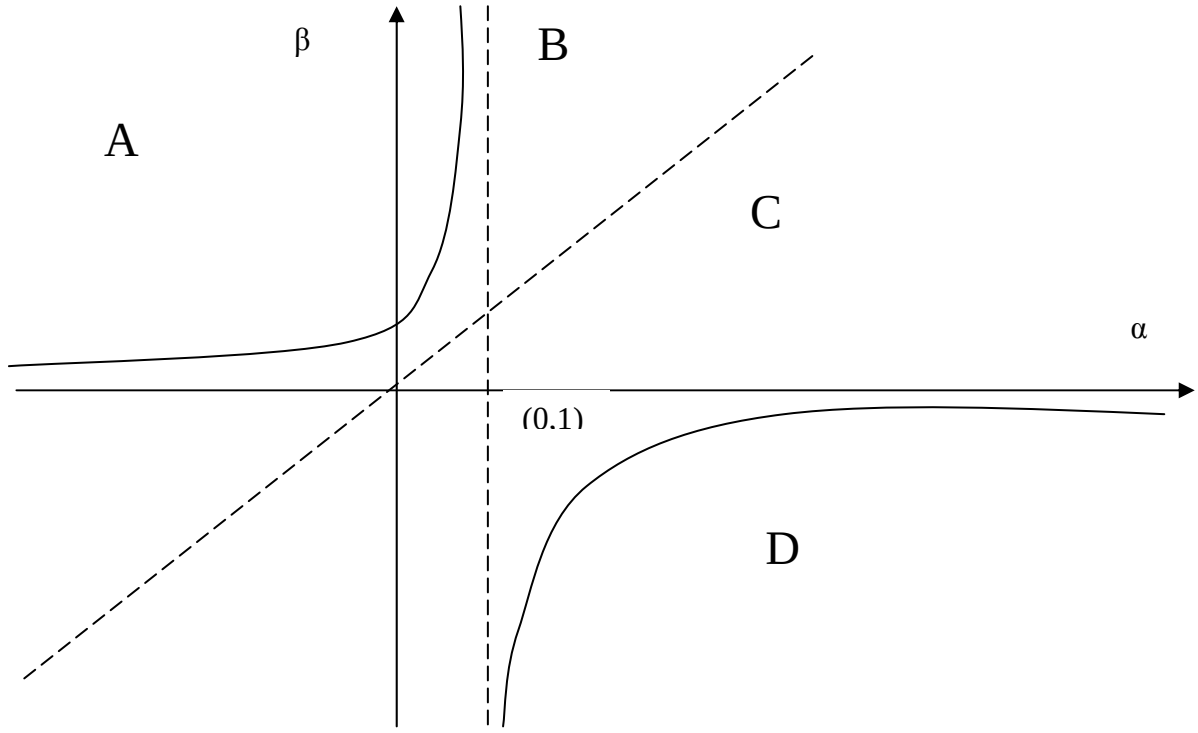
Riešenie: Charakteristická rovnica daného systému je

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

kde $a_1 = \beta - \alpha$, $a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta$.
Krivky $a_1 = \beta - \alpha = 0$, $a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta = 0$ rozdelia rovinu parametrov α, β na štyri časti. Podľa Hurwitzovho kritéria je

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 > 0,$$

Teda $a_2 > 0$.



- V oblasti A je $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Nulové riešenie je nestabilné.
- V oblasti B je $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Nulové riešenie je asymptoticky stabilné.
- V oblasti C je $a_1 < 0$, $a_2 > 0$. Nulové riešenie je nestabilné.
- V oblasti D je $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Nulové riešenie je nestabilné.

Na hraniciach medzi oblasťami:

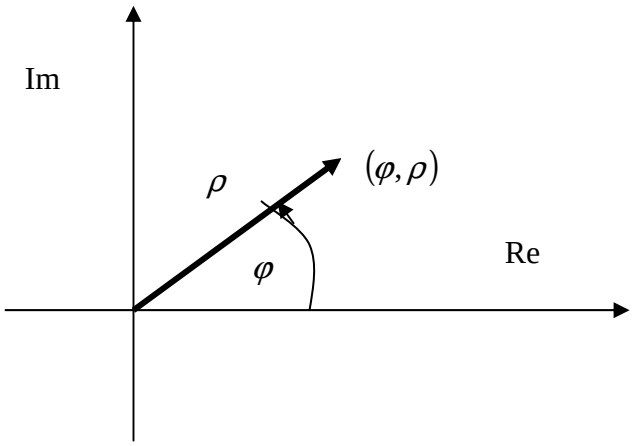
- A a B pre $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ je $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ je nulové riešenie nestabilné.
- B a C pre $\beta = \alpha$ je $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ a teda nulové riešenie je stabilné.
- C a D pre $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ je $a_1 < 0$, $a_2 = 0$ a teda nulové riešenie je nestabilné.

Nasledujúci veta dáva jednoduché no veľmi užitočné kritérium pre lokalizovanie charakteristických koreňov matice.

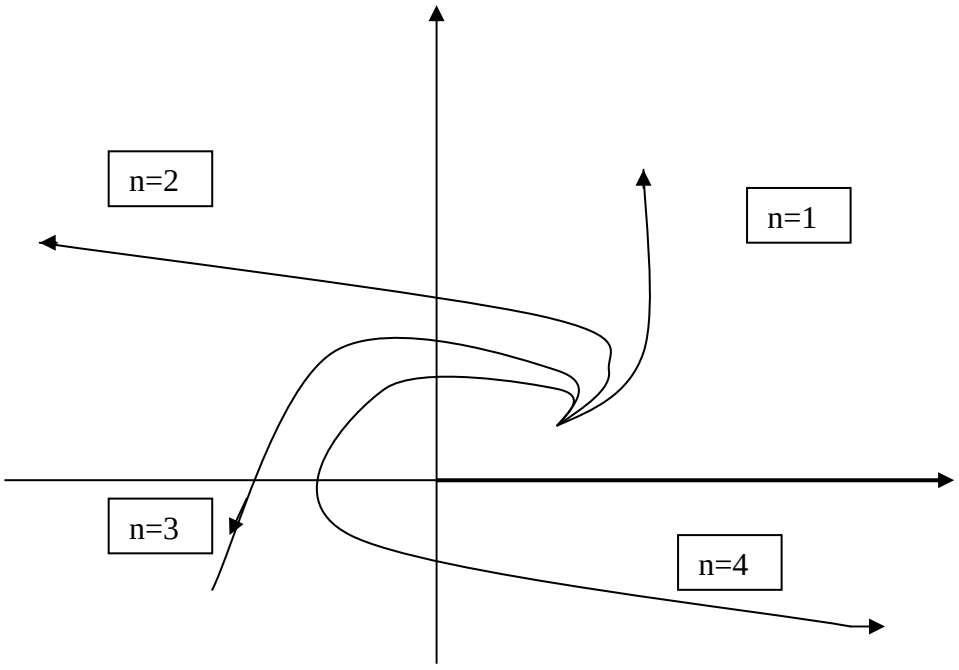
Veta *Nech* $\mathbf{A} = (a_{ik})$ *je štvorcová konštantná matica* $n \times n$ *(komplexná alebo reálna). Potom všetky charakteristické korene matice* $\mathbf{A}$ *ležia v komplexnej rovine v zjednotení* $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ *, kružníc* K_i *so stredom* a_{ii} *a polomerom* $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *, t.j..*

$$K_i = \left\{ z; |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

Vieme, že odozvu frekvencie funkcie $P(\lambda)$, dostaneme dosadením $\lambda = i\omega, 0 < \omega < \infty$ do funkcie, čo nám umožní vyčísliť $\rho = |P(i\omega)|$ a uhol φ. Analytické metódy pre vyšetrovanie stability zahrňujú štúdium vzťahov medzi tromi parametrami ω, ρ, φ, kde ρ a φ určujú vektor partikulárnej frekvencie ω. Toto znázornenie je známe ako Nyquist-Michailov diagram.



Nutná a postačujúca podmienka preto, aby reálne časti koreňov charakteristickej rovnice $P_n(\lambda) = 0$ (ak $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$) boli záporné je $\varphi = \frac{\pi}{2} n$ (pozri ďalší obrázok).



Vzhľadom na možnosti matematických softvérov je v dnešnej dobe používanie tejto metódy neefektívne.