5.6 Metóda prvého priblíženia

Uvažujme systém (5.5.1) Predpokladajme, že uvažovaný systém má triviálne riešenie, (t.j. $f_i(0,0,...,0)=0$, pre $i=1,2,....,n$. Ďalej predkladáme, že funkcie $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ sú ľubovoľne krát diferencovateľné v začiatku súradnicového systému. V tejto časti ukážeme, že stabilitu nelineárneho systému (5.5.1) môžeme vyšetrovať pomocou vhodného lineárneho systému rovníc.
Rozložme funkcie f_i do Taylorovho radu v okolí bodu (0,0,…,0):

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1,x_2,...,x_n)$$

kde $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(0,0,...,0)}{\partial x_j}$ a R_i vyjadrujú chybu aproximácie.
Systém (5.5.1) môže byť teraz vyjadrený

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1,x_2,...,x_n),\quad i=1,2,....,n. \tag{5.6.1}$$

V ďalšom budeme vyšetrovať príslušný systém lineárnych rovníc

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ , \tag{5.6.2}$$

ktorý nazývame *systém rovníc prvého priblíženia* pre (5.6.1) .

Veta *Ak*

1) *všetky korene charakteristickej rovnice*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}... & 1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda... & a_{2n} \\ ... & ..... & \\ a_{n1} & a_{n2} \quad ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{5.6.3}$$

majú záporné reálne časti, potom triviálne (nulové) riešenie systému (5.5.1) aj systému (5.6.2) je asymptoticky stabilné.

2) *aspoň jeden koreň charakteristickej rovnice (5.6.3) má kladná reálne časť, potom nulové riešenie (5.6.1) aj systému (5.6.2) je nestabilné.*

Uvedená veta sa nedá vo všeobecnosti aplikovať ak reálne časti každého koreňa charakteristickej rovnice (5.6.3) sú nekladné, pričom reálna časť aspoň jedného koreňa je nulová.

Príklad *Vyšetrite stabilitu stacionárneho bodu systému*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+y-y^3,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3x+y+x^2. \tag{5.6.4}$$

.

Riešenie: Zodpovedajúci systém prvého priblíženia je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y\,. \qquad (5.6.5)$$

Príslušná charakteristická rovnica pre (5.6.5) je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{alebo} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0\,. \qquad (5.6.6)$$

Korene charakteristickej rovnice (5.6.6) sú $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Pretože $\lambda_1 > 0$ je nulové riešenie systému (5.6.4) nestabilné.