5.5 Metóda Lyapunových funkcií

Metóda Lyapunovových funkcií slúži na priame vyšetrovanie stability systému

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1,2,...,n. \tag{5.5.1}$$

Pomocou vhodne zvolených *Lyapunovových* funkcií $V(t, x_1, ..., x_n)$, môžeme vyšetrovať stabilitu stacionárneho bodu bez toho aby sme hľadali riešenia daného systému. Predpokladajme, že skúmaný systém má triviálne riešenie ($f_i(0,0,...,0) = 0$, pre $i = 1,2,....,n$).

Funkcia $V(x_1,...,x_n)$ definovaná v nejakom okolí začiatku súradného systému má konštantné znamienko (funkcia je kladne definitná, resp. záporne definitná) ak pre

$$|x_i| < h, \qquad i = 1,2,....,n, \tag{5.5.2}$$

kde $h > 0$, táto funkcia nadobúda len kladné alebo záporne hodnoty a má nulovú hodnotu len ak $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

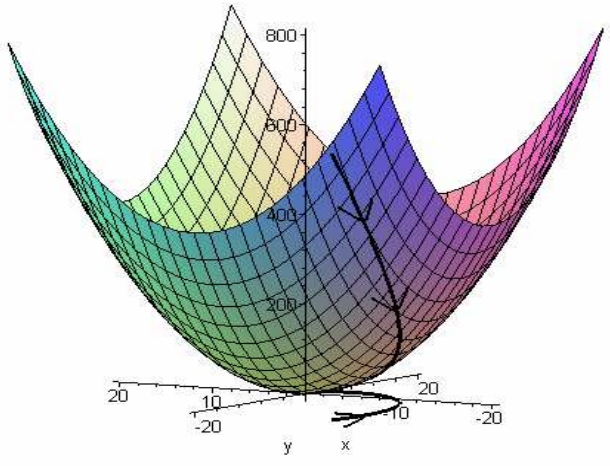
Funkcia $V(x_1,...,x_n)$ sa nazýva ***kladne definitná*** *na* (5.5.2) ak $V(0,...,0) = 0$ a $V(x_1,...,x_n) > 0$ pre ${x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 \neq 0$, pričom $x_1,...,x_n$ spĺňajú (5.5.2).
Funkcia $V(x_1,...,x_n)$ sa nazýva *záporne definitná na* (5.5.2) ak $-V(x_1,...,x_n)$ je kladná definitná na (5.5.2).

Nech $V(x_1,...,x_n)$ je differencovateľná funkcia vzhľadom na všetky premenné. Nech $x_1, x_2, ..., x_n$ sú funkcie času vyhovujúce systému (5.5.1) . Potom pre totálnu deriváciu V vzhľadom na čas t, máme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5.5.3}$$

Veta (Lyapunovova veta o stabilite.) *Ak pre systém (5.5.1) existuje funkcia s pevným znamienkom $V(x_1,...,x_n)$ (Lyapunovova funkcia), ktorej totálna derivácia $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyčíslená pozdĺž trajektórii systému (5.5.2) je buď funkcia konštantného znamienka, ktoré je opačné ako znamienko V, alebo je táto derivácia identicky rovná nule, potom stacionárny bod systému (5.5.1) je stabilný.*

Veta (Lyapunova veta o asymptotickej stabilite.) *Ak pre systém (5.5.1) existuje funkcia konštantného znamienka $V(x_1,...,x_n)$ (Lyapunovova funkcia), ktorej totálna derivácia $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyčíslená pozdĺž trajektórii systému (5.5.1) je funkcia konštantného znamienka, ktoré je opačné ako znamienko V, potom stacionárny bod (5.5.1) je asymptoticky stabilný.*



Príklad *Uvažujte systém*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x\,. \qquad (5.5.4)$$

Vyšetrite stabilitu systému (5.5.4).

Riešenie: Zvolíme funkciu $V = x^2 + y^2$. Jednoduchý výpočet vedie k

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2xy - 2xy \equiv 0\,.$$

Lyapunovova veta o stabilite zaručuje, že stacionárny bod systému (5.5.4)je stabilný.

Príklad Sledujme stabilitu bodu kľudu $x \equiv 0, y \equiv 0$ sústavy diferenciálnych rovníc

$$x' = -ay - b^2x^5, \quad y' = ax - c^2y^5$$

pre možné hodnoty parametrov a, b, c.

Riešenie: Uvažujme funkciu $V(x, y) = x^2 + y^2$. Derivácia tejto Ljapunovovej funkcie, podľa času t, pozdĺž trajektórie je

$$\frac{dV}{dt} = 2xx' + 2yy' = 2x(-ay - b^2x^5) + 2y(ax - c^2y^5) = -2(b^2x^6 + c^2y^6) \le 0\,.$$

Teda nulové riešenie je stabilné pre ľubovoľné hodnoty uvažovaných parametrov.

Treba si uvedomiť, že nejestvuje všeobecná metóda na konštrukciu Lyapunovovej funkcie. V nasledujúcich vetách uvedieme kritéria pre nestabilitu.

Veta (Lyapunovova veta o nestabilite.) *Nech pre systém (5.5.1) existuje funkcia* $v(x_1,...,x_n)$ *differencovateľná v nejakom okolí počiatku súradného systému taká, že* $v(0,0,...,0) = 0$. *Ak jej totálna derivácia* $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ *vyčíslená pozdĺž trajektórii systému (5.5.1) je kladne definitná funkcia a ľubovoľne blízko počiatku sa nachádzajú body, v ktorých funkcia* $v(x_1,...,x_n)$ *nadobúda kladné hodnoty, potom stacionárny bod systému (5.5.1) je nestabilný.*

Veta (Chetayevova veta o nestabilite.) *Nech pre systém (5.5.1) existuje funkcia* $v(x_1,...,x_n)$, *spojite differencovateľná v okolí počiatku súradnicového systému splňujúca*

a) v každom okolí Ω *stacionárneho bodu existuje množina* Ω_1, *na ktorej* $v(x_1,...,x_n) > 0$, *pričom* $v(x_1,...,x_n) = 0$ *v hraničných bodoch* Ω_1 *ktoré sú vnútri* Ω;

b) stacionárny bod (0,0,…,0) je hraničný bod Ω_1;

c) derivácia $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ *vyčíslená pozdĺž trajektórii systému (3.18) je kladne definitná v* Ω_1.

Potom stacionárny bod systému (5.5.1) je nestabilný.

Príklad *Vyšetrime stabilitu stacionárneho bodu systému*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y. \qquad (5.5.5)$$

Riešenie: Zvolíme funkciu $v(x, y) = x^2 - y^2$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x^2 + 2y^2$$

je kladne definitná funkcia. Podľa Chetayevovej vety o nestabilite stacionárny bod systému (5.5.5) je nestabilný.

Poznámka 5.5.1 Lyapunovove funkcie môžu mať aj komplikovanejší tvar.
Pre rovnicu

$$x''(t) + \varphi(x') + f(x) = 0,\ \varphi(0) = 0,\ f(0) = 0,$$

kde φ, f sú funkcie spojité v okolí začiatku súradnicového systému a naviac je $s\varphi(s) > 0$, $s f(s) > 0$. Uvažovaná rovnica môže byť prepísaná na systém

$$x' = y,\quad y' = -f(x) - \varphi(y),$$

pre ktorý môžeme za Lyapunovovu funkciu položiť $v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(x)y + y(-f(x) - \varphi(y)) = -y\varphi(y) < 0$$

a preto nulové riešenie je stabilné.

V poslednom období sa venuje pozornosť bunkovým modelom neurónových sieti. Niektoré nové kritéria pre vyšetrovanie stability boli získané pomocou metódy Lyapunovových funkcií a tiež pomocou ďalších metód.

Uvažujme nasledujúci model neurónových sieti (DCNN) popísaný pomocou systému nelineárnych diferenciálnych rovníc s oneskorením

$$x_i'(t) = a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j\left[x_j(t)\right] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}g_j\left[x_j(t-\tau_j)\right] + k_i,$$

kde všetky a_{ii} sú záporné konštanty, b_{ij}, c_{ij} sú nezáporné konštanty, k_i sú reálne konštanty, $x_i(t)$ odpovedá stavovému vektoru i tej jednotky v čase t, $g_j\left[x_j(t)\right]$ je výstup z j tej jednotky v čase t, b_{ij} vyjadruje váhu medzi j tou jednotkou a i tou jednotkou v čase t, c_{ij} vyjadruje váhu j tej jednotky v čase $t-\tau_j$, τ_j je nezáporná konštanta, ktorá odpovedá oneskoreniu pri prenose z j tej jednotky, a_{ii} predstavuje mieru zmeny, s ktorou sa potenciál i tej jednotky dostane do kľudového stavu, ktorý nastal ak je táto jednotka izolovaná od externých výstupov a nie je napojená na sieť.

V [6,7] autori riešili problém určenia bodu ekvilibria pre daný systém. Konštantné riešenie $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ algebrického systému rovníc

$$a_{ii} + \sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + c_{ij})g_j\left[x_j\right] + k_i = 0, \quad i = 1,2,...,n$$

sa nazýva bod ekvilibria daného systému.

Predpokladajme, že všetky funkcie g_j, $j = 1,2,..,n$ majú nasledujúce vlastnosti:

(H_1) g_j sú ohraničené na R;

(H_2) g_j spĺňa Lipschitzovu podmienku (existuje také číslo $\mu_j > 0$, že $\left|g_j(u) - g_j(v)\right| \le \mu_j|u - v|$ pre každé $u, v \in R$);

(H_3) existuje $q \in R$ také, že

$$\max_i \frac{M'}{|a_{ii}|}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + c_{ij}) \le q < 1, \quad M' = \max_i \mu_j.$$

Veta (Buša, Pirč.) *Nech všetky g_j spĺňajú predpoklady (H_1), (H_2) (H_3). Potom existuje jediný bod ekvilibria $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ daného systému*

$$\tilde{x}_i = \lim_{t\to\infty} x_i^{(l)}, \quad i = 1,2,...,n,$$

kde $\mathbf{x}^{(l)}$ je definované rekurentne

$$x_i^{(l+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[k_i + \sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + c_{ij})g_j\left[x_j^{(l)}\right]\right], \quad l = 0,1,2,...$$

pre ľubovoľne zvolený začiatočný vektor $\mathbf{x}^{(0)}$.

Pre (DCNN) model Cao, J Zhou, D. ukázali, že zodpovedajúca Lyapunovova funkcia je

$$V = \sum_{i=1}^{n}\left(|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\mu_j \int_{t-r_j}^{t}|x_j(s)|\mathrm{d}s\right)$$

za predpokladu, že $(H_1) - (H_3)$ sú splnené.

Poznámka Pre autonómny lineárny systém vyjadrený rovnicou $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, môžeme Lyapunovovu funkciu vyjadriť v tvare

$$V = \mathbf{x}^T\mathbf{Qx}.$$