5.4 Typy stacionárnych bodov

V tejto časti budeme skúmať stabilitu nulového riešenia systému dvoch homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y,$$
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y \qquad (5.4.1)$$

pričom

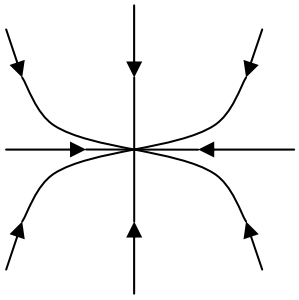
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bod $x = 0$, $y = 0$, pre ktorý sa pravá strana (5.4.1) vynuluje sa nazýva *stacionárny bod systému (5.4.1).*

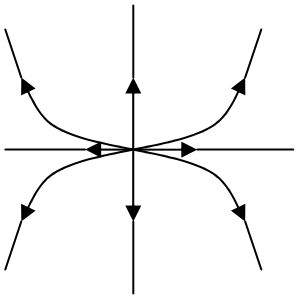
Pre vyšetrovanie stability stacionárneho bodu (triviálneho riešenia) (5.4.1) je dôležité stanoviť charakteristickú rovnicu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ resp. } \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \qquad (5.4.2)$$

a nájsť jej korene λ_1, λ_2. Možné sú nasledujúce prípady stability a nestability:

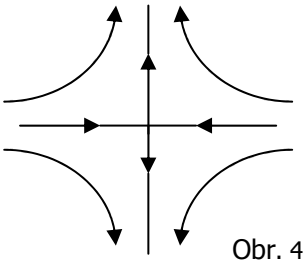


Obr. 2

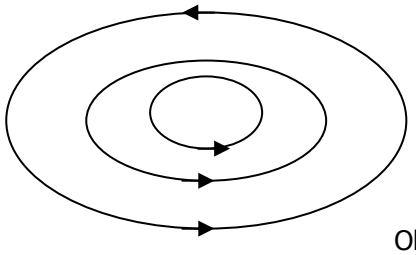


Obr. 3

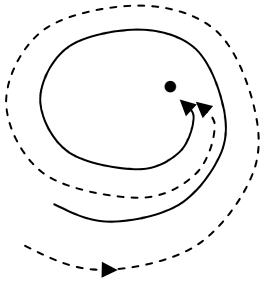
1. Korene λ_1, λ_2 sú reálne rôzne:
   a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Stacionárny bod je asymptoticky stabilný (stabilný uzol, Obr. 2);
   b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Stacionárny bod je nestabilný (nestabilný uzol, Obr. 3);
   c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Stacionárny bod je nestabilný (sedlový bod , Obr. 4).
2. Korene $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$ sú komplexné:
   a) $p < 0$, $q \neq 0$. Stacionárny bod je asymptoticky stabilný (stabilné ohnisko, Obr. 5);
   b) $p > 0$, $q \neq 0$. Stacionárny bod je nestabilný (nestabilné ohnisko, Obr. 6);
   c) $p = 0$, $q \neq 0$. Stacionárny bod je stabilný (stred, Obr. 7).
3. Korene $\lambda_1 = \lambda_2$ sú reálne násobné:
   a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Stacionárny bod je asymptoticky stabilný (stabilný uzol);
   b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Stacionárny bod je nestabilný (nestabilný uzol).



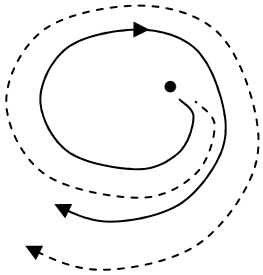
Obr. 4



Obr. 7



Obr. 5



Obr. 6

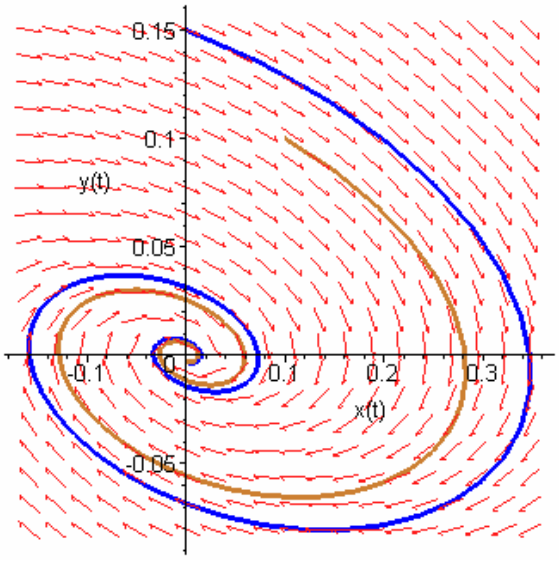
Príklad 5.4.1 Zostrojme fázový portrét sústavy diferenciálnych rovníc

$$x' = y, \quad y' = -0{,}1x - 0{,}2y,$$

ak $x(0) = 0{,}1; \quad y(0) = 0{,}1$ (ideálne riešenie) a $x(0) = 0; \quad y(0) = 0{,}15$ (riešenie vyvolané poruchou -zmenou začiatočných podmienok)

Riešenie: Použitím MAPLu dostávame:

```
> > with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=-.1*x(t)-0.2*y(t)], \
[x(t),y(t)],t=0..50,[[x(0)=0.1,y(0)=0.1],[x(0)=0,y(0)=0.15]],stepsize=.5, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```



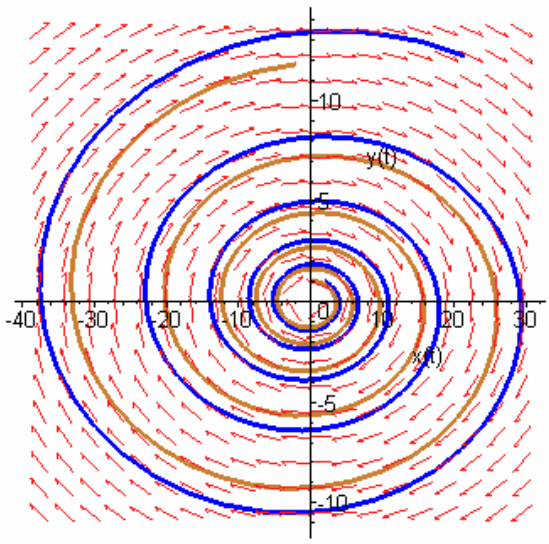
Vidíme, že „poruchové riešenie“ s rastúcim časom sa približuje k ideálnemu riešeniu.

Príklad 5.3.2 Zostrojme fázový portrét sústavy diferenciálnych rovníc

$$x' = y, \quad y' = -0{,}1x,$$

ak $x(0) = 0{,}1; \quad y(0) = 1$ (ideálne riešenie) a $x(0) = 2; \quad y(0) = 1$ (riešenie vyvolané poruchou - zmenou začiatočných podmienok)

```
> > with(DEtools):
 phaseportrait([D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=-.1*x(t)], \
[x(t),y(t)],t=0..100,[[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=2,y(0)=1]],stepsize=.5, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```



Vidíme, že „poruchové riešenie“ s rastúcim časom sa vzdiaľuje od ideálneho riešenia.

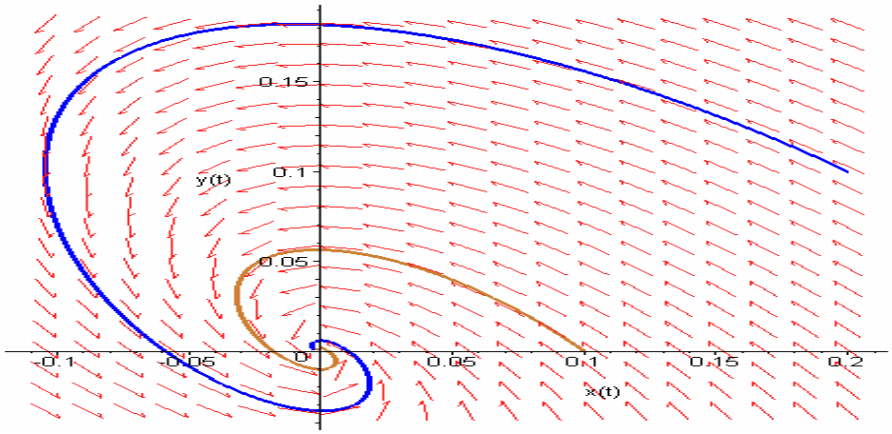
Nelineárny systém diferenciálnych rovníc môže mať viac kritických bodov (bodov rovnováhy-equilibrium point). Uvažujme systém diferenciálnych rovníc“

$$x' = -x - y, \quad y' = x + y^3 .$$

Riešením sústavy rovníc $0 = -x - y, \quad 0 = x + y^3$ dostaneme body $(0,0), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$.

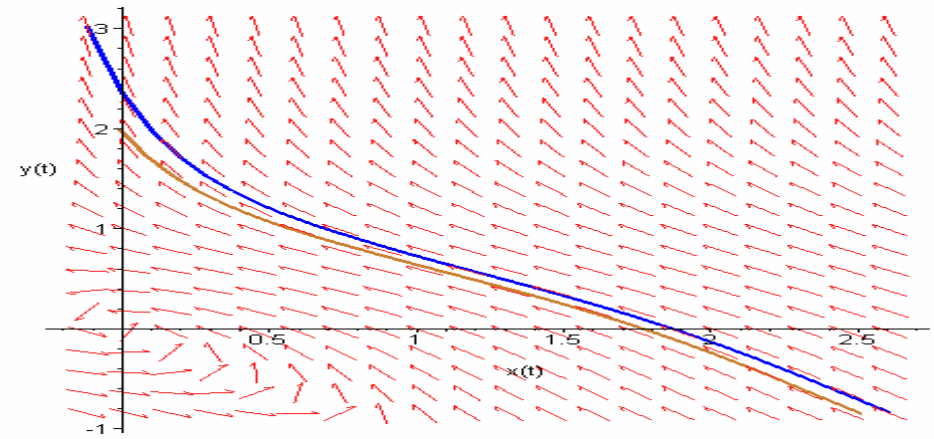
Fázový portrét v okolí bodu $(0,0)$ získame pomocou MAPLu takto:

```
> with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=-x(t)-y(t),D(y)(t)=x(t)+y^3(t)], \
[x(t),y(t)],t=0..10,[[x(0)=0.1,y(0)=0],[x(0)=0.2,y(0)=0.1]],stepsize=.05, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```

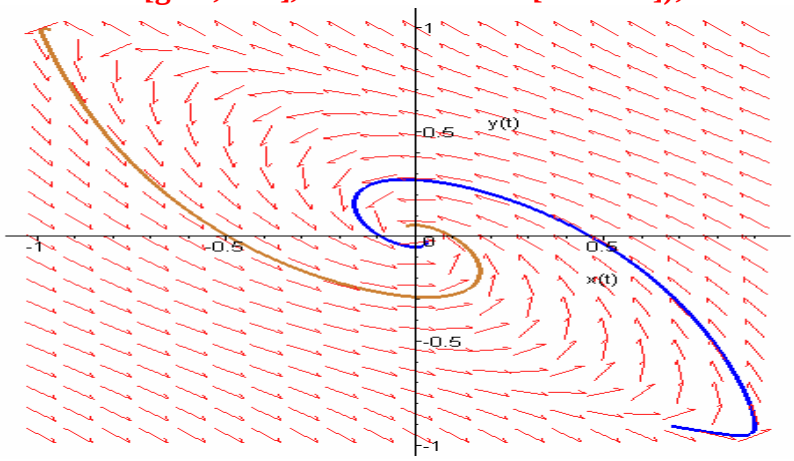


Ďalej uvedieme fázové portréty, danej sústavy diferenciálnych rovníc, pre rôzne začiatočné podmienky:

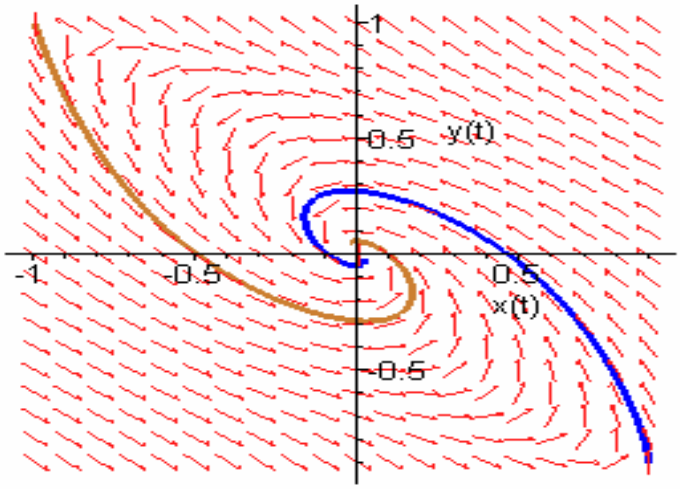
```
> with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=-x(t)-y(t),D(y)(t)=x(t)+y^3(t)], \
[x(t),y(t)],t=-1..0.5,[[x(0)=0.8,y(0)=0.8],[x(0)=0.8,y(0)=0.9]],stepsize=.05, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```



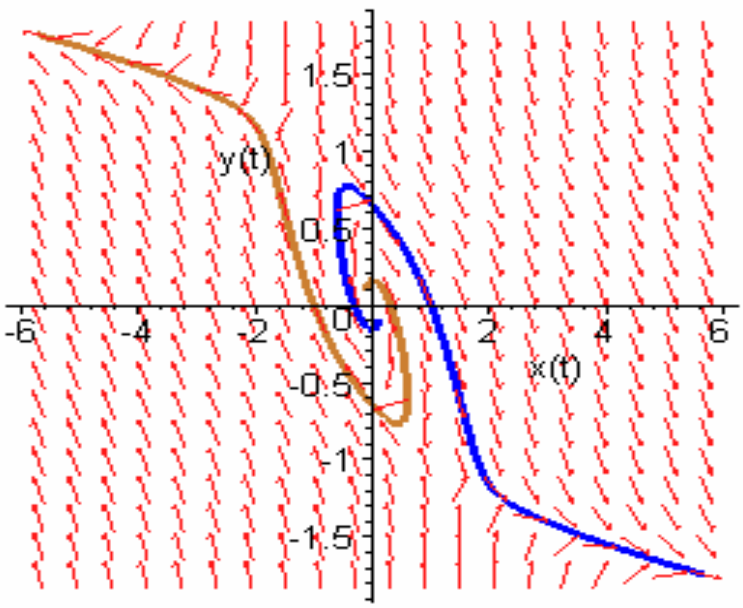

```
> with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=-x(t)-y(t),D(y)(t)=x(t)+y^3(t)], \
[x(t),y(t)],t=-2..8,[[x(0)=-0.99,y(0)=0.99],[x(0)=.9,y(0)=-0.9]],stepsize=.05, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```




```
> with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=-x(t)-y(t),D(y)(t)=x(t)+y^3(t)], \
[x(t),y(t)],t=0..8,[[x(0)=-0.99,y(0)=0.99],[x(0)=.9,y(0)=-0.9]],stepsize=.05, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```



```
> with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=x(t)+y(t),D(y)(t)=-x(t)-y^3(t)], \
[x(t),y(t)],t=0..10,[[x(0)=-0.09,y(0)=0.09],[x(0)=.09,y(0)=-0.09]],stepsize=.05, \
scene=[x(t),y(t)], linecolor=[gold,blue],method=classical[foreuler]);
```



Odpovedajúce krivky vo fázovej rovine (x,y) môžeme nájsť nasledujúcim postupom. Majme sústavu diferenciálnych rovníc $\frac{dx}{dt} = F(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = G(x, y)$ a $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, potom odpovedajúca krivka vo fázovej rovine (x,y) je riešením diferenciálnej rovnice $\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$ so začiatočnou podmienkou $y(x_0) = y_0$, ak $F(x, y) \neq 0$