5.3 Kritéria stability

Uvedieme kritéria pre vyšetrovanie stability a nestability stacionárneho bodu pre systém n homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \qquad i = 1,2,...,n \quad (n \geq 2) . \tag{5.5}$$

Veta *Ak*

1. *všetky korene charakteristickej rovnice systému (5.5) majú zápornú reálnu časť, potom stacionárny bod je asymptoticky stabilný.*
2. *aspoň jeden koreň charakteristickej rovnice má kladnú reálnu časť, potom stacionárny bod je nestabilný.*
3. *všetky korene charakteristickej rovnice majú nekladnú reálnu časť pričom všetky korene s nulovou reálnou časťou sú jednoduché, potom stacionárny bod je stabilný.*

V prípade, že všetky korene charakteristickej rovnice s nulovou reálnou časťou sú násobné, tak potom stacionárny bod môže byť stabilný alebo nestabilný.

Príklad *Zistite, či stacionárny bod (0,0,0) systému*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + z ,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y - z ,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = y - z$$

je stabilný?

Riešenie: Zostavíme odpovedajúcu charakteristickú rovnicu.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

alebo $(1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$. Korene tejto rovnice $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_1 = -1$ majú záporné reálne časti, preto stacionárny bod je asymptoticky stabilný.

Riešenie pomocou MAPLu:

> **with(LinearAlgebra):**
R := Matrix([[-1,0,1], [0,-2,-1],[0,1,-1]]);

$$R := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

> **Eigenvalues(R);**

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> A=[-1,0,1;0,-2,-1;0,1,-1]
A =
   -1    0    1
    0   -2   -1
    0    1   -1

>> eig(A)

ans =
  -1.0000
  -1.5000 + 0.8660i
  -1.5000 - 0.8660i
```

Použitím MATLABu môžeme priamo zistiť či všetky korene charakteristickej rovnice majú záporné reálne časti pomocou príkazu:

y = all(real(roots(r)) < 0)

Ak y=1, tak všetky korene charakteristickej rovnice majú záporné reálne častí. Ak y=0 potom niektorý z koreňov charakteristickej rovnice má reálnu časť nulovú alebo kladnú.

Príklad Pomocou MATLABu zistíme či všetky korene charakteristických rovníc, odpovedajúce diferenciálnym rovniciam:

a) $x'' - 2{,}1x' + 0{,}2x = 0$,

b) $x'' + 2x' + 0{,}2x = 0$,

c) $x''' - 2{,}1x'' + 0{,}2x' = 0$,

majú reálne časti záporné.

Riešenie:

a)

```
>> r=[1 -2.1 0.2]
r =
    1.0000   -2.1000    0.2000

>> y = all(real(roots(r)) < 0)
y =
     0
```

Výsledok $y = 0$ potvrdzuje, že nie všetky korene danej charakteristickej rovnice majú reálne časti záporné (korene sú 2 a 0,1).

b)

```
>> r=[1 2.1 0.2]
r =
    1.0000    2.1000    0.2000

>> y = all(real(roots(r)) < 0)
y =
     1
```

Výsledok $y = 1$ potvrdzuje, že všetky korene danej charakteristickej rovnice majú reálne časti záporné (korene sú –2 a -0,1).

```
>> roots(r)
ans =
   -2.0000
   -0.1000
```

c)

```
>> r=[1 2.1 0.2 0]
r =
    1.0000   2.1000    0.2000         0

>> y = all(real(roots(r)) < 0)
y =
     0
```

Výsledok $y = 0$ potvrdzuje, že nie všetky korene danej charakteristickej rovnice majú reálne časti záporné (korene sú -2 ;-0,1;0).

```
>> roots(r)
ans =
         0
   -2.0000
   -0.1000
```