5.2 Definície stability

Uvažujme nasledujúci systém diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad (5.1)$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ a $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \big(f_1(t, \mathbf{x}), f_2(t, \mathbf{x}), ... f_n(t, \mathbf{x})\big)$. Predpokladáme, že funkcia $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je definovaná na $(a, \infty) \times R^n$. Budeme hovoriť, že riešenie $\mathbf{x}(t)$ je ohraničené na intervale $\langle t_0, b)$ ak existuje kladná konštanta c taká, že

$$\| \mathbf{x}(t) \| \le c$$

pre $t \in \langle t_0, b)$. V ďalšom položme $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}$.
Nech je daný nasledujúci nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad (5.2)$$

kde prvky matice $\mathbf{A}(t)$ sú spojité funkcie na $(0, \infty)$. Nech $\mathbf{U}(t)$ je fundamentálna matica riešení homogénneho systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}.$$

Definície stability

V tejto časti budeme vyšetrovať štruktúru riešení systému diferenciálnych rovníc (5.1). Každé riešenie $\mathbf{x}(t)$ tohto systému môže byť reprezentované integrálnou krivkou v priestore R^{n+1} alebo trajektóriou vo fázovom priestore R^n. Budeme predpokladať, že uvažované systémy majú jediné riešenie spĺňajúce Cauchyho podmienky. Chceme vedieť, či podmienka

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{z}(t_0)\| < \delta,$$

zaručuje, že

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon, \quad t \ge t_0.$$

Inými slovami ak body $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ a $(t_0, \mathbf{z}(t_0))$ sú navzájom blízke, či riešenia $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$ sú tiež navzájom blízke na celom intervale (t_0, ∞) (pozri Obr.1).

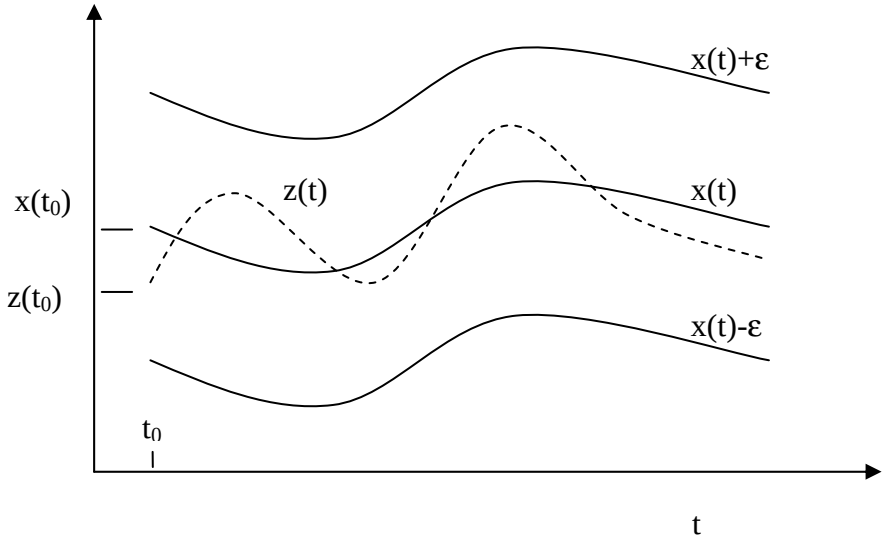
Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky stabilné pre* $t \to \infty$ *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *také, že pre každé riešenie* $\mathbf{z}(t)$ *systému (5.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku*

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{z}(t_0)\| < \delta, \qquad (5.3)$$

nerovnosť

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon \qquad (5.4)$$

platí pre každé $t \ge t_0$.



Obr.1

Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky nestabilné pre* $t \to \infty$ *ak pre ľubovoľné* $\delta > 0$ *také, že* $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{z}(t_0)\| < \delta$ *, podmienka (5.4) neplatí. To jest aspoň jedna z nerovností*

$$| x_i(t) - z_i(t) | < \varepsilon$$

je porušená.

Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky asymptoticky stabilné pre* $t \to \infty$ *ak je stabilné a naviac z podmienky* $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ *vyplýva aj platnosť podmienky*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| = 0.$$

Z oboch definícii je zrejme, že ak riešenie (5.1) je asymptoticky stabilné potom je tiež stabilné.

Vo všeobecnosti číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ *závisí od bodu* t_0. Ak číslo $\delta = \delta(\varepsilon)$ *nezáleží na* t_0, potom môžeme definovať nové druhy stability.

Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky rovnomerne stabilné pre* $t \to \infty$ *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *také, že pre každé riešenie* $\mathbf{z}(t)$ *systému (5.1) spĺňujúce začiatočné podmienky* $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{z}(t_0)\| < \delta$ *a nerovnosť* $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ *platí pre každé* $t \geq t_0$.

Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky rovnomerne asymptoticky stabilné pre* $t \to \infty$ *ak je rovnomerne stabilné a naviac existuje* $\delta_0 > 0$ *a pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $T = T(\varepsilon) > 0$ *také, že ak* $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{z}(t_1)\| < \delta_0$ *pre nejaké* $t_1 \geq t_0$ *potom* $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ *platí pre každé* $t \geq t_1 + T$.

Definícia *Riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky silne stabilné pre* $t \to \infty$ *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *také, že pre každé riešenie* $\mathbf{z}(t)$ *spĺňujúce* $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{z}(t_1)\| < \delta_0$ *pre nejaké* $t_1 \geq t_0$ *podmienka* $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ *platí pre každé* $t \geq t_0$.

Definícia *Nech* $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) = 0$. *Nulové riešenie systému (5.1) sa nazýva Lyapunovsky exponenciálne stabilné pre* $t \to \infty$ *ak existujú konštanty* $K > 0$, $\alpha > 0$ *také, že každé riešenie* $\mathbf{x}(t)$ *splňujúce pre* $t_0 \le t < \infty$, $\|\mathbf{x}\| \le h$ *platí*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le K \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \|\mathbf{x}(t_0)\|, \quad t \ge t_0.$$

Zrejme rovnomerná stabilita implikuje stabilitu a rovnomerne asymptotická stabilita dáva aj asymptotickú stabilitu a tiež rovnomernú stabilitu. Naviac silná stabilita implikuje rovnomernú stabilitu. Exponenciálna stabilita implikuje asymptotickú stabilitu.

Ak je diferenciálny systém (5.1) autonómny, t.j.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

potom stabilita konštantného riešenia je ekvivalentná rovnomernej stabilite a asymptotická stabilita je ekvivalentná rovnomernej asymptotickej stabilite.
Vyšetrovanie stability riešenia $\mathbf{x}(t)$ systému (5.1) môže byť nahradená vyšetrovaním stability nulového (triviálneho) riešenia $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ nasledujúceho systému:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \qquad (5.1')$$

kde $\mathbf{F}(t,0,...,0) = 0$. Táto podmienka zaručuje, že (5.1') má triviálne riešenie.

Definícia stability a nestability triviálneho riešenia môže byť preformulovaná nasledovne. Triviálne riešenie systému (5.1') je *Lyapunovsky stabilné* ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé riešenie $\mathbf{z}(t)$ systému (5.1'), ktoré spĺňa začiatočné podmienky

$$\| \mathbf{z}(t_0) \| < \delta, \qquad (5.3')$$

je splnená nerovnosť

$$\| \mathbf{z}(t) \| < \varepsilon \qquad (5.4')$$

pre každé $t \ge t_0$.
Geometricky, pre prípad $n = 2$ stabilita znamená, že ak zostrojíme valec s polomerom ε, ktorého os tvorí os Ot, tak vieme nájsť také δ okolie bodu $(t_0,0,0)$ v rovine $t = t_0$, že integrálna krivka

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t)$$

vychádzajúca z tohto okolia zostane vo valci pre každé $t \ge t_0$.

Ak okrem nerovnosti $\| \mathbf{z}(t) \| < \varepsilon$, je splnená podmienka $\lim_{t\to\infty} |z_i(t)| = 0$, $i = 1,2,...,n$, tak potom *stabilita je asymptotická.*

Triviálne riešenie $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ je nestabilné ak pre každé $\delta > 0$ podmienka $\| \mathbf{z}(t) \| < \varepsilon$ nie je splnená (v aspoň jednej zložke $\mathbf{z}(t)$).