5.1 Základné pojmy

Mnoho problémov technickej praxe môžeme popísať pomocou systémov obyčajných diferenciálnych rovníc alebo pomocou systémov diferenčných rovníc (elektrotechnika, ekonomika, fyzika, mechanika, robotika, ...).

V tejto kapitole sa budeme zaoberať skúmaním vlastností riešení takýchto systémov bez toho že by sme poznali ich presné riešenia. Pri riešení mnohých problémov (napríklad pri regulácií) potrebujeme mať informácie o všetkých riešeniach systému diferenciálnych alebo diferenčných rovníc. Diferenciálne rovnice vyššieho rádu obyčajne vieme prepísať na sústavu diferenciálnych rovníc a preto budeme sa zaoberať predovšetkým vlastnosťami riešení sústav diferenciálnych, resp. diferenčných rovníc.

Napríklad jednosmerný cudzo budený motor s konštantným budením je opísaný stavovou sústavou diferenciálnych rovníc

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} .$$

Malá zmena parametra (malá porucha) systému môže spôsobiť úplne iný priebeh riešenia v závislosti na rastúcom čase.

Sledujme čo spôsobí „malá“ zmena koeficienta sústavy diferenciálnych rovníc :

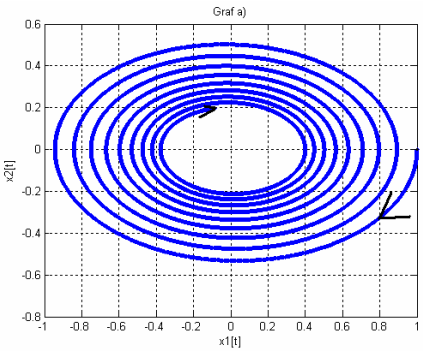
a) $x_1' = x_2, \quad x_2' = -0{,}3x_1 - 0{,}02x_2$ ak $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

na priebeh riešenia sústavy.

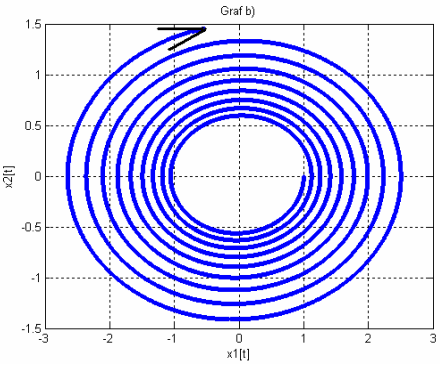
b) Sústava $x_1' = x_2, \quad x_2' = -0{,}3x_1 + 0{,}02x_2$ ak $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

má „skoro“ tie isté koeficienty. Pomocou MATLABu graficky znázornime riešenia týchto sústav v rovine x_1, x_2 .

```
>> A=[0 1;-0.3 -0.02];x0=[1; 0];
>> for t=0:.01:100
X=[X expm(t*A)*x0];
end
>> plot(X(1,:),X(2,:),'.')
>> grid;title('Graf b)')
>> xlabel('x1[t]');ylabel('x2[t]')
```




```
>>B=[0 1;-0.3 0.02];x0=[1; 0];
>> X=[];
>> for t=0:.01:100
X=[X expm(t*B)*x0];
end
>> plot(X(1,:),X(2,:),'.')
>> grid;title('Graf b)')
>> xlabel('x1[t]');ylabel('x2[t]')
```



Vidíme, že priebeh riešenia s rastúcim časom má „opačný “ smer. V sústave a) s rastúcim časom bod pohybujúci sa po trajektórií približuje sa k riešeniu $(x_1, x_2) = (0,0)$, zatiaľ čo v sústave b) sa s rastúcim časom vzďaľuje od riešenia $(x_1, x_2) = (0,0)$.

Každý dynamický systém môže byť v určitom rovnovážnom stave, t.j. v stave keď všetky derivácie uvažovaných veličín (charakterizujú rýchlosť zmeny veličiny) v čase sú nulové.

Reálne systémy, vo všeobecnosti, môžu mať „veľa“ rovnovážnych stavov. V uvedenej sústave diferenciálnych rovníc $x_1' = x_2, \quad x_2' = -0{,}3x_1 - 0{,}02x_2$ je jej riešením aj triviálne (nulové riešenie). Rovnovážny stav nastane ak $x_1' = 0, \quad x_2' = 0$, t. j. je riešením sústavy rovníc $0 = x_2, \quad 0 = -0{,}3x_1 - 0{,}02x_2$.

Ukážeme si na príklade aké zmeny s rastúcim časom nastanú pri zmene začiatočných hodnôt.

```
> with(DEtools):
> r1:= diff(y(x),x)=z(x);r2:= diff(z(x),x)=-.3*y(x)-.02*z(x);
```

$$r1 := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \mathrm{z}(x)$$

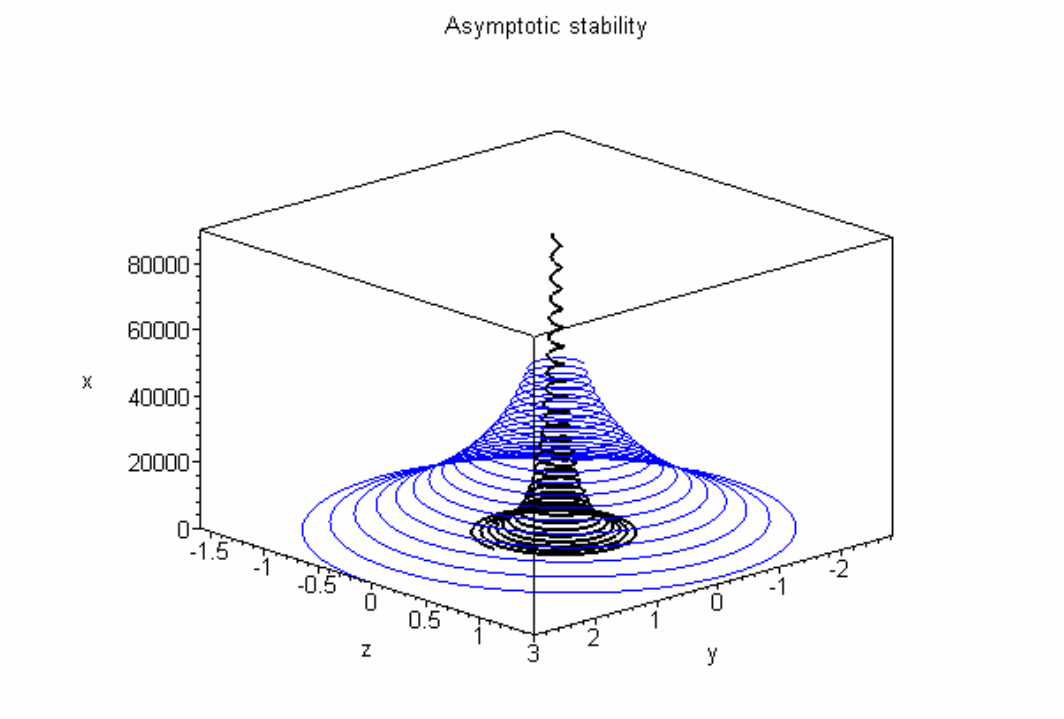
$$r2 := \frac{d}{dx}\,\mathrm{z}(x) = -0.3\,\mathrm{y}(x) - 0.02\,\mathrm{z}(x)$$

```
> in1 :=y(0)=1,z(0)=0;in2 :=y(0)=3,z(0)=0;
```

$$in1 := \mathrm{y}(0) = 1, \mathrm{z}(0) = 0$$

$$in2 := \mathrm{y}(0) = 3, \mathrm{z}(0) = 0$$

```
> with(plots):opts := thickness=1, numpoints=1000, color=blue:
G:=animate( spacecurve, [[y2(x),z2(x), A*x],x=0..A, opts],
A=0..300 ):
> opts := thickness=2, numpoints=1000, color=black:
> F:=animate( spacecurve, [[y1(x),z1(x), x*x],x=0..300, opts],
A=0..300 ):
> display({F, G},labels=["y","z","x"], axes=boxed,
title=`Asymptotic stability`);
```



Vidíme, že pri poruche (zmena začiatočnej podmienky) s rastúcim časom sa poruchové riešenie približuje k ideálnemu riešeniu.