P5 Aplikácie diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice I. rádu

Príklad. V elektrickom obvode s rezistorom odporu R a cievkou indukčnosti L, ktorý je pripojený na zdroj konštantného napätia U_0 určíme, aký je prúd v závislosti na čase.

Riešenie. Použitím Ohmovho a Kirchhoffovho zákona zapíšeme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{U_0}{L}$$

Riešením tejto rovnice je každá funkcia vo všeobecnom tvare

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(c+\frac{U_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t\right)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(c+\frac{U_0}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right)=ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_0}{R}$$

Z podmienky $i(0)=0$ dostaneme konštantu $c=-\frac{U_0}{R}$ a po úprave

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Príklad. Vypočítajme množstvo rádioaktívnej látky m v ľubovoľnom okamihu t.

Riešenie. Predpokladajme, že v čase $t=t_0$ je m_0 jednotiek látky. Rýchlosť rozpadu rádioaktívnej látky je úmerná množstvu prítomnej látky. Podľa uvedeného zákona rozpadu platí

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km,$$

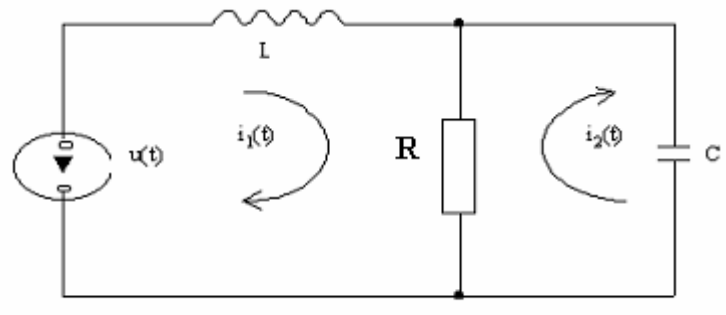
kde $m=m(t)$ je spojitá funkcia, $k>0$ je konštanta úmernosti. Riešením uvedenej rovnice spolu s počiatočnou podmienkou $m(t_0)=m_0$ je funkcia

$$m=m_0e^{-k(t-t_0)}.$$

Sústavy diferenciálnych rovníc

Príklad. Stanovme prúdy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ v obvode na obrázku, keď cievkou v okamihu pripojenia zdroja konštantného napätia $u(t)=U_0$ preteká prúd i_0 a na kondenzátore bolo v tomto okamihu napätie U_C. Pripojenie napätia uvažujeme v okamihu $t=0$.

Riešenie. Úlohu doriešime s hodnotami
$U_0=10$ V, $i_0=0{,}5$ A, $U_C=20$ V, $R=100\ \Omega$, $L=2$ H, $C=10^{-4}$ F.



Riešenie. Na základe Kirchhoffových zákonov dostaneme tieto rovnice

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+R(i_1-i_2)=U_0$$

$$R(i_2-i_1)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(s)\,\mathrm{d}s+U_C=0\,.$$

Začiatočná podmienka je $i_1(0)=i_0$. Prvá rovnica je diferenciálna, druhá rovnica je integrálna. Ak ju zderivujeme, dostaneme

$$R\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{C}i_2(t)=0\,.$$

Integráciou tejto rovnice v hraniciach od 0 do t dostaneme

$$R\left[i_2(t)-i_2(0)-i_1(t)-i_1(0)\right]+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(s)\,\mathrm{d}s=0\,.$$

Ak platí

$$R\left[i_1(0)-i_2(0)\right]=U_C\text{, čiže}$$

$$i_2(0)=-\frac{U_C}{R}+i_0\,,$$

pôvodná sústava so začiatočnou podmienkou $i_1(0)=i_0$ je ekvivalentná so sústavou diferenciálnych rovníc

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+R(i_1-i_2)=U_0$$

$$R\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{C}i_2=0\,.$$

Odtiaľ

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}i_1+\frac{R}{L}i_2+\frac{U_0}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}i_1+\left(\frac{R}{L}-\frac{1}{RC}\right)i_2+\frac{U_0}{L}\,.$$

Túto sústavu s konkrétnymi hodnotami doriešime eliminačnou metódou.

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-50i_1+50i_2+5$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-50i_1-50i_2+5$$

so začiatočnými podmienkami

$$i_1(0)=0{,}5$$

$$i_2(0)=0{,}3$$

Riešením tejto sústavy je

$$i_1(t)=0{,}4e^{-50t}\cos 50t+0{,}3e^{-50t}\sin 50t+0{,}1$$

$$i_2(t)=0{,}3e^{-50t}\cos 50t-0{,}4e^{-50t}\sin 50t\,.$$

Príklad. Model Lovec -korisť

Nech $x(t)\,,y(t)$ sú populácie predátorov a ich koristi v čase t. Predpokladáme, že

(i) Neprítomnosť predátorov znamená, že korisť rastie rýchlosťou priamo úmernou veľkosti svojej populácie.
(ii) Ak nie je prítomná korisť, tak populácia lovcov klesá úmerne svojej veľkosti.
(iii) Prítomnosť aj koristi aj predátorov spôsobuje rast populácie predátorov a pokles populácie koristi, t.j. populácia predátorov rastie a populácia koristi klesá úmerne súčinu oboch populácii.

Tieto predpoklady vedú k nasledujúcemu systému diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by), \qquad a, b > 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = -py + qxy = -y(p - qx), \qquad p, q > 0.$$

Je zrejmé, že obe derivácie dx/dt , dy/dt sú nulové ak

$$x = x_e = \frac{p}{q}, \quad y = y_e = \frac{a}{b}.$$

Hodnoty x_e, y_e predstavujú ekvilibrium (rovnováhu).

- **Model súperenia**

Nech $x(t), y(t)$ sú dve populácie súperiace o zdroje potravy. Potom neprítomnosť jednej populácie pôsobí priaznivo na rast druhej populácie a naopak prítomnosť jednej populácie spôsobuje pokles druhej populácie. Tieto podmienky vedú k nasledujúcemu systému diferenciálnych rovníc.

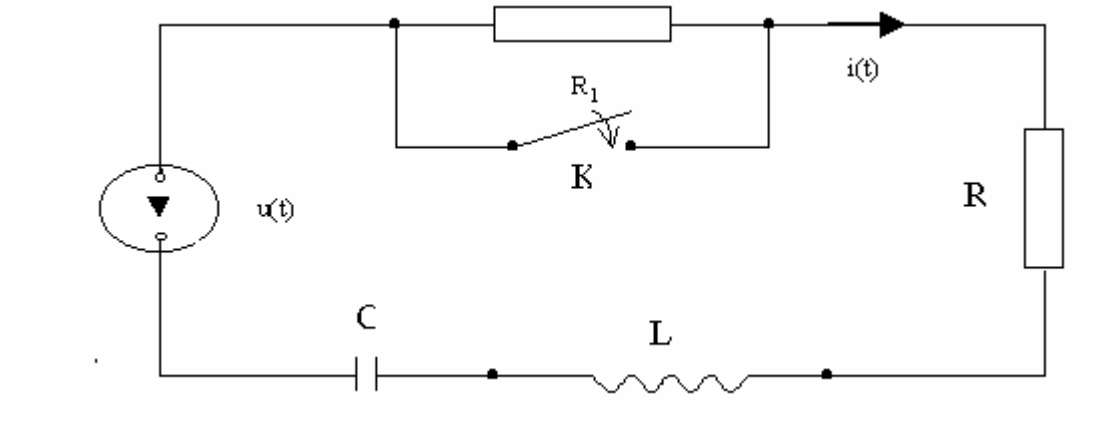
$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = bx\left(\frac{a}{b} - y\right), \qquad a, b > 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = py - qxy = qy\left(\frac{p}{q} - x\right), \qquad p, q > 0.$$

Je zrejmé, že ekvilibrium nastáva v bode $(p/q, a/b)$. Ak uvažujeme súperenie v rámci toho istého druhu, tak máme

$$\frac{dx}{dt} = ax - a_{11}x^2 - bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = py - p_{11}y^2 - qxy.$$

Laplaceova transformácia

Príklad. Určíme prúd $i(t), t \in \langle 0, \infty)$ v obvode na obrázku, ktorý bol v čase $t = 0$ pripojený na zdroj napätia $u(t) = U_0 \sin \omega t$, ak $i(0+) = i_0$, $\omega \in R$.



Riešenie. Priebeh prúdu i v danom obvode opisuje diferenciálna rovnica

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=U_0\sin\omega t\,,$$

ktorá sa za predpokladu, že $i\in D_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{L}\{i(t)\}=I(p)$, transformuje do tvaru

$$pLI(p)-Li_0+RI(p)=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2}\,,$$

odkiaľ

$$I(p)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+\frac{R}{L}\right)}+\frac{i_0}{p+\frac{R}{L}}$$

(☼)

Keďže platí

$$\frac{\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+\frac{R}{L}\right)}=\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left[\frac{-p+\frac{R}{L}}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$$

z (☼) dostaneme

$$I(p)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left[\frac{-p+\frac{R}{L}}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]+\frac{i_0}{p+\frac{R}{L}}$$

z čoho použitím tabuľky originálov a obrazov Laplaceovej transformácie, dostaneme

$$i(t)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left(\frac{R}{L\omega}\sin\omega t-\cos\omega t+e^{-\frac{R}{L}t}\right)+i_0e^{-\frac{R}{L}t}=U_0\frac{R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{L^2\omega^2+R^2}+i_0e^{-\frac{R}{L}t}$$