P3 Fourierova transformácia

V tejto časti uvedieme základné vlastnosti Fourierovej integrálnej transformácie, ako aj spôsob jej použitia na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi a na analýzu nestacionárnych prechodových javov.

Definícia Nech f je komplexná funkcia reálnej premennej, ktorá je absolútne integrovateľná na intervale $(-\infty,\infty)$ ($\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$), a nech je na intervale $(-\infty,\infty)$ spolu so svojou prvou deriváciou po častiach spojitou funkciou. **Fourierovou transformáciou** (alebo Fourierovým obrazom, transformantom, spektrom, spektrálnou funkciou) funkcie f nazývame funkciu F, ktorá je pre všetky reálne ω definovaná predpisom

$$F(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

kde i je imaginárna jednotka.

Ak F je Fourierou obraz funkcie f, potom

$$\bar{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

nazývame *spätná Fourierova transformácia*.

V elektrotechnickej a rádiotechnickej literatúre sa Fourierou obraz $F(i\omega)$, často nazýva *spektrálna charakteristika funkcie* f. Funkcia $|F(i\omega)|$ sa nazýva *amplitúdová charakteristika (amplitúdové spektrum)* a funkcia $\psi(\omega)=-\arg F(i\omega)$ sa nazýva *fázová charakteristika (fázové spektrum funkcie* f). Pre všetky $\omega\in(-\infty,\infty)$ platí

$$F(i\omega)=F(\omega)e^{-i\psi(\omega)}=A(\omega)-iB(\omega),$$

kde $A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$, $B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$. Z toho vyplýva, že

$$F(\omega)=\sqrt{(A(\omega))^2+(B(\omega))^2},\ \psi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{B}(\omega)}{\mathrm{A}(\omega)}.$$

Amplitúdová funkcia $F(\omega)$ je párna funkcia a fázová funkcia $\psi(\omega)$ je nepárnou funkciou nezávisle premennej (frekvencie) ω.

Niektoré vlastnosti F-transformácie

Vzťah medzi funkciou $f(t)$ a jej Fourierovým obrazom $F(i\omega)$ vyjadrime takto:

$$f(t)\cong F(i\omega)\ .$$

Pri aplikáciách Fourierovej transformácie bude často potrebné vedieť, ako sa zmení obraz $F(i\omega)$ v dôsledku nejakej operácie s funkciou f. Uvedieme niektoré základné vlastnosti Fourierovej transformácie. Budeme predpokladať existenciu obrazov jednotlivých funkcií ($f(t)\cong F(i\omega)$, $g(t)\cong G(i\omega)$).

PF1: Linearita

$c_1 f(t) + c_2 g(t) \cong c_1 F(i\omega) + c_2 G(i\omega)$, kde c_1, c_2 sú konštanty.

PF2: Substitúcia

$e^{iat} f(t) \cong F[i(\omega - a)]$, kde a je reálna konštanta.

PF3: Translácia (posunutie)

$f(t-a) \cong e^{-i\omega a} F(i\omega)$, kde je reálne číslo.

PF4: Derivácia obrazu

Ak existujú Fourierove obrazy funkcií $f(t)$ a $tf(t)$, tak $tf(t) \cong -F'(i\omega)$.

PF5: Derivácia originálu

Ak $f(t)$ je spojitá funkcia, $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t)$, tak $f'(t) \cong i\omega F(i\omega)$.

	$f(t)$	$F(\omega)$	Poznámky
1.	$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	Impulz v $t = t_0$
2.	$\eta(t)$	$\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$	
3.	$e^{-at}\eta(t)$	$\frac{1}{i\omega + a}$	Platí pre $a > 0$
4.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{(a)^2 + (i\omega)^2}$	Platí pre $a > 0$
5.	$te^{-at}\eta(t)$	$\frac{1}{(i\omega + a)^2}$	Platí pre $a > 0$
6.	$e^{-at}\cos\omega_0 t\ \eta(t)$	$\frac{(i\omega_0 + a)}{(i\omega_0 + a)^2 + \omega_0^2}$	Platí pre $a > 0$
7.	$e^{-at}\sin\omega_0 t\ \eta(t)$	$\frac{\omega_0}{(i\omega_0 + a)^2 + \omega_0^2}$	Platí pre $a > 0$

Príklad K predmetu $f(t) = 3te^{-5t}\eta(t)$ nájdime Fourierou obraz $F(i\omega)$.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> with(inttrans):
> fourier(3*t*exp(-5*t)*Heaviside(t),t,w);
```

$$\frac{3}{(5 + w\,I)^2}$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> r = maple('statement')

r =

statement

>> syms t w y n
>> maple('with(inttrans):fourier(3*t*exp(-5*t)*Heaviside(t),t,w)')

ans =

3/(5+i*w)^2
```

Príklad K obrazu $F(i\omega)=\dfrac{3}{(5+i\omega)}$ nájdime predmet $f(t)$.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> with(inttrans):
> invfourier(3/(5+w*I)^2,w,t);
```

$$3\,t\,\mathbf{e}^{(-5\,t)}\,\text{Heaviside}(t)$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> syms I t w
>> ifourier(3/(5+w*I)^2,w,t)
 ans =
3/2*exp(-5*i*t/I)*t/I^2*(-2*heaviside(t)+1+signum(0,Im(1/I),0))
```

Príklad Pomocou Fourierovej transformácie riešme diferenciálnu rovnicu $y'(t)-y(t)=\eta(t)$, pričom $y(0)=0$.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> with(inttrans):
> fourier(diff(y(t),t)-y(t)=Heaviside(t), t, w);
```

$$\text{fourier}(y(t),t,w)\,(-1+w\,I)=\pi\,\text{Dirac}(w)-\frac{I}{w}$$

```
> invfourier(fourier(y(t),t,w)*(-1+w*I) = Pi*Dirac(w)-I/w,w,t);
```

$$\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)-y(t)=\text{Heaviside}(t)$$

```
> invfourier((Pi*Dirac(w)-I/w)/(-1+w*I),w,t);
```

$$-\text{Heaviside}(t)-\mathbf{e}^{t}\,\text{Heaviside}(-t)$$

Príklad Pomocou Fourierovej transformácie riešme diferenciálnu rovnicu $y'(t)-3y(t)=5e^{(-t^2)}$, pričom $y(0)=0$.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> de2 := diff(y(t),t)-3*y(t)=5*exp(-t^2);
```

$$de2:=\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)-3\,y(t)=5\,\mathbf{e}^{(-t^2)}$$

```
> dsolve(de2,y(t),method = fourier);
```

$$y(t)=\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(3\,t+9/4)}\left(-1+\text{erf}\left(t+\frac{3}{2}\right)\right)$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>>r = maple('statement');
>> syms t  y
>> maple('dsolve(diff(y(t),t)-3*y(t)=5*exp(-t^2),y(t),method = fourier)')
ans =
y(t) = 5/2*pi^(1/2)*exp(9/4)*(erf(t+3/2)-1)/exp(-t)^3
```