P2 Z – transformácia

V nasledujúcej časti uvedieme definíciu jednostrannej jednoduchej Z -transformácie ako aj niektoré základné vlastnosti Z - transformácie.

Z –transformáciou postupnosti (a_n), ktorá splňuje podmienku $|a_n| \le Me^{\alpha n}$ ($M > 0, \alpha \in \mathbf{R}$), nazývame komplexnú funkciu $F(z)$, kde

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (|z| > e^{\alpha}).$$

Inverzná Z - transformácia Z^{-1} je definovaná pre všetky $n \in \mathbf{N}$ vzťahom

$$f(n) = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_K F(z)dz,$$

pričom krivka K je kladne orientovaná kružnica so stredom v bode z_0 taká, že vo svojom vnútri obsahuje všetky singulárne body funkcie F a leží v prstencovom okolí bodu ∞.

Vlastnosti Z - transforácie

PZ1: Lineárnosť
Ak $F_1(z) = Z[f_1(n)]$, $F_2(z) = Z[f_2(n)]$ a α, β sú konštanty, tak

$$Z[\alpha\ f_1(n) + \beta\ f_2(n)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z).$$

PZ2: Predstih
Ak $F(z) = Z[f(n)]$, tak

$$Z[f(n+1)] = zF(z) - zf(0).$$

Opakovanou aplikáciou tejto vlastnosti dostávame

$$Z[f(n+k)] = z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(1) - \ldots - zf(k-1).$$

PZ4: Tlmenie s a^n
Ak $F(z) = Z[f(n)]$, tak

$$Z[a^n f(n)] = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

PZ5: Konvolúcia
Ak $F_1(z) = Z[f_1(n)]$ a $F_2(z) = Z[f_2(n)]$, tak

$$F_1(z)F_2(z) = Z\left[\sum_{k=0}^{n} f_1(k) f_2(n-k)\right].$$

PZ3: Derivovanie obrazu (násobenie predmet s n)
Ak $F(z) = Z[f(n)]$, tak

$$Z[nf(n)] = -z\frac{dF(z)}{dz}.$$

Všeobecne

$$Z[n^k f(n)] = (-z)^k \frac{d^k F(z)}{dz^k}.$$

Tabuľka: Slovník niektorých originálov a ich obrazov v Z - transformácii

	$f(n)$	$F(z)$	Poznámky
1.	$\delta(n)$	1	Jednotkový impulz
2.	1^n	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
3.	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
4.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
5.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
6.	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\lvert z\rvert > 1$
7.	$n(n-1)$	$\frac{2z}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
8.	$a^n, a \in \mathbf{R} - \{0\}$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
9.	$na^n, a \in \mathbf{R} - \{0\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$
10.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
11.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Inverznú integrálnu Z transformáciu dostaneme podobne ako pri Laplaceovej transformácii

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} res[F(z)z^{n-1}, p_i],$$

$$res[F(z)z^{n-1}, p_i] = \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{m_i - 1}}{ds^{m_i - 1}} \left[(z - p_i)^{m_i} F(z) z^{n-1}\right]$$

kde p_i je pól násobnosti m_i a $m_1, m_2, \ldots, m_k = n$.