P1 Laplaceova transformácia

V nasledujúcej časti uvedieme definíciu Laplaceovej transformácie a niektoré jej vlastnosti.

Nech $f(t)$ je daná funkcia, ktorá je definovaná pre všetky $t \geq 0$. Funkcia $F(s)$ sa nazýva **Laplaceovou transformáciou** originálu $f(t)$ (ak existuje integrál)

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt .$$

Veta L.1 *Nech $f(t)$ je po častiach spojitá funkcia na každom konečnom intervale pre $t \geq 0$ a splňuje podmienku*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

pre všetky $t \geq 0$ a pre reálne konštanty α, M. Potom Laplaceova transformácia $f(t)$ existuje pre všetky $s > \alpha$.

Naviac funkcia $f(t)$ je inverznou transformáciou alebo inverznou funkciou ku $F(s)$, označujeme ju $L^{-1}(F)$ a zapisujeme v tvare

$$f(t) = L^{-1}(F(s)).$$

Je to proces transformácia z oblasti *s* do časovej oblasti.

Vlastnosti Laplaceovej transformácie

PL1: Lineárnosť
Ak $F_1(s) = L[f_1(t)]$, $F_2(s) = L[f_2(t)]$, a α, β sú konštanty, tak

$$L[\alpha\ f_1(t) + \beta\ f_2(t)] = \alpha\ F_1(s) + \beta\ F_2(s)\ .$$

PL2: Tlmenie
Ak $F(s) = L[f(t)]$, kde $s > \alpha$, tak transformáciou $e^{at} f(t)$ je $F(s-a)$, kde $s - a > \alpha$.

PL3: Derivácia $f(t)$
Nech funkcia $f(t)$ je spojitá pre všetky $t \geq 0$, sú splnené podmienky Vety L.1 pre nejaké α, M, a má deriváciu $f'(t)$ ktorá je po častiach spojitou na každom konečnom intervale pre $t \geq 0$. Potom Laplaceova transformácia $f'(t)$ existuje kde $s > \alpha$, a

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0).$$

Opakovanou aplikáciou tejto vlastnosti dostávame

$$L[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0).$$

PL4: Ak $f(t)$ po častiach spojitá a splňuje podmienky Vety L.1, tak

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \ (s>0, s>\alpha),$$

PL5: Ak $F(s)$ je obrazom $f(t)$, tak $e^{-as}F(s)$ ($a>0$, je ľubovoľné) je obrazom funkcie

$$\overline{f} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t<a, \\ f(t-a) & \text{if} \quad t>a. \end{cases}$$

PL6: Ak $L(f(t)) = F(s)$, tak $L(tf(t)) = -F'(s)$.

PL7: Ak $f(t)$ splňuje podmienky Vety L.1 a ak $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$ existuje, tak

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(z)dz \quad (s>\alpha).$$

PL8: Ak $F_1(s) = L[f_1(t)]$ a $F_2(s) = L[f_2(t)]$, tak

$$F_1(s)F_2(s) = L\left[\int_0^\infty f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)d\tau\right].$$

Inverzná Laplaceova transformácia

Použitie Laplaceovej transformácie je efektívne na riešenie diferenciálnych rovníc. Priama metóda je použitie nevlastného integrálu na určenie originálu (predmetu), pričom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds \quad .$$

Poznamenávame, že integračnou cestou je vertikálna priamka od $a-i\infty$ do $a+i\infty$. Obraz môžeme nájsť niekoľkými spôsobmi. Špeciálne ak $F(s)$ je racionálna funkcia použijeme rozklad na parciálne zlomky a ku každej čiastočnej funkcii nájdeme odpovedajúcu inverznú Laplaceovu transformáciu.

Uvažujme teraz metódu reziduí, ak všetky póly $p_1, p_2, \ldots, p_n$ funkcie $F(s)$ nie sú rôzne. V prípade, že pól p_i je násobnosti m_i a $m_1, m_2, \ldots, m_k = n$, potom

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} res\left[F(s)e^{st}, p_i\right]$$

kde

$$res\left[F(s)e^{st}, p_i\right] = \frac{1}{(m_i-1)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{m_i-1}}{ds^{m_i-1}}\left[(s-p_i)^{m_i}F(s)e^{st}\right].$$

TABUĽKA: Slovník niektorých originálov a ich obrazov v **L** - transformácii

	$f(t)$	$F(s)$	Poznámky
1.	$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$	Impuls pre $t=\tau$
2.	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	
3.	$e^{-at}\eta(t)$	$\frac{1}{s+a}$	
4.	$\cos bt\,\eta(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	
5.	$\sin bt\,\eta(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	
6.	$e^{-at}\cos bt\,\eta(t)$	$\frac{s+b}{(s+a)^2+b^2}$	
7.	$e^{-at}\sin bt\,\eta(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	
8.	$t\eta(t)$	$\frac{1}{s^2}$	
9.	$e^{-at}t^n\eta(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad t<0,\\ 1 & \text{if} \quad t>0.\end{cases}$$

Riešené príklady pomocou Laplaceovej transformácie:

Príklad Pomocou Laplaceovej transformácie riešme diferenciálu rovnicu

$$y''+y=\eta(t),$$

ak $y(0)=0, y'(0)=0$.

- *Riešenie pomocou MAPLu:*

```
> de7 := diff(y(t),t,t)+y(t) = t*Heaviside(t);
```

$$de7 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)+y(t)=\text{Heaviside}(t)\,t$$

```
> dsolve({de7,D(y)(0)=0,y(0)=0}, y(t), method=laplace);
```

$$y(t)=-\sin(t)+t$$

- *Riešenie pomocou MATLABu:*

```
>> r = maple('statement');
>> y = maple('dsolve({diff(y(t),t,t)+y(t) =t*Heaviside(t),D(y)(0)=0,y(0)=0}, y(t),
method=laplace)')
y =
y(t) = t-sin(t)
```

Príklad Nájdime Laplaceov obraz $F(s)$ funkcie $f(t) = te^t \cos t + \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

Riešenie: a) Zadanie v MATLABe s využitím funkcií MAPLU:

```
>> maple('with(inttrans);')
>> maple('laplace(t*exp(t)*cos(t)+(exp(t)-exp(-t))/t, t, s)')
```

Výsledok:

```
ans =
-1/((s-1)^2+1)+2*(s-1)^2/((s-1)^2+1)^2-log(s-1)+log(s+1)
```

b) Zadanie v MATLABe bez použitia MAPLU:

```
>> syms s t F real
>> F=laplace(t*exp(t)*cos(t)+(exp(t)-exp(-t))/t)
 F =
-1/((s-1)^2+1)+2*(s-1)^2/((s-1)^2+1)^2-log(s-1)+log(s+1)
```

(Môžeme ho upraviť do tvaru $F(s) = \frac{-1}{(s-1)^2+1} + \frac{2(s-1)^2}{\left((s-1)^2+1\right)^2} + \ln\frac{s+1}{s-1}$).

Príklad Nájdime predmet $f(t)$, ak jeho Laplaceov obraz je $F(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3+3s^2+3s+1}$.

Riešenie: a) Zadanie v MATLABe s použitím MAPLUje:

```
>> maple('invlaplace((s^2+2*s-1)/(s^3+3*s^2+3*s+1), s, t)')
```

Výsledok:

```
ans =
-t^2*exp(-t)+exp(-t)
```

b) Zadanie v MATLABe bez použitia MAPLUje:

```
>> syms s t f real
>> f=ilaplace((s^2+2*s-1)/(s^3+3*s^2+3*s+1), s, t)
 f =
 -t^2*exp(-t)+exp(-t)
```

Príklad Pomocou Laplaceovej transformácie riešme diferenciálu rovnicu

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4t},$$

ak $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

- *Riešenie pomocou MAPLu:*

```
> de1 := diff(y(t),t$2) - 5*diff(y(t),t) + 6*y(t) = exp(4*t);
```

$$de1 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right) - 5\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right) + 6\,\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^{(4t)}$$

```
> dsolve({de1, y(0)=0, D(y)(0)=1}, y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(2t)} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(4t)}$$

```
> dsolve({de1, y(0)=0, D(y)(0)=1}, y(t),method=laplace);
```

$$\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^{(3t)}\sinh(t)$$