1.4 Výpočet exponenciálu matice, podobné matice

Uvedieme niektoré metódy určenia exponenciálu matice pre niektoré špeciálne typy matíc:

Diagonálna matica. Komutatívne matice

- Nech **A** je diagonálna matica

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

potom

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{E}+\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{pmatrix} d_1^{\,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^{\,2} \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}+\dots$$

$$+\begin{pmatrix} d_1^{\,k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^{\,k} \end{pmatrix}\frac{t^k}{k!}+\dots=\begin{pmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

- Nech matice ***X,Y*** sú komutatívne (***XY***= ***YX***) a ***A***= ***X*** +***Y***, potom

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{(\mathbf{X}+\mathbf{Y})t}=e^{\mathbf{X}t}e^{\mathbf{Y}t}.$$

Príklad *Nájdime exponenciál matice **A** ak*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Pretože

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

je

$$e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}=\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\left[\mathbf{E}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\dots\right]=e^{5t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lagrangeova metóda

Nech matica **A** má vlastné hodnoty $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ a $\lambda_i\neq\lambda_j$ pre $i\neq j$. A funkciu F môžeme aproximovať pomocou Lagrangeovho polynómu v tvare

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} F(\lambda_i)$$

potom $F(x) - L_n(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n)G(x)$, kde G je analytická funkcia v kruhu $|x| < R$. Platí $F(x) = L_n(x) + P_n(x)G(x)$. Pre komutatívne matice $P_n(\mathbf{A}), G(\mathbf{A})$, dostávame $F(\mathbf{A}) = L_n(\mathbf{A}) + P_n(\mathbf{A})G(\mathbf{A})$ a $F(\mathbf{A}) = L_n(\mathbf{A})$, pretože pre všetky matice $n \times n$ je $P_n(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Potom

$$L_n(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_i - \lambda_j} F(\lambda_i)$$

a pre $F(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$, dostávame

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_i - \lambda_j} e^{\lambda_i t}.$$

Môžeme to vyjadriť tiež v tvare

$$e^{\mathbf{A}t} = a_0(t)\mathbf{E} + a_1(t)\mathbf{A} + \ldots + a_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}.$$

Cayley-Hamiltononova metóda

Vieme, že pre exponenciál matice $\mathbf{A}$, $n \times n$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$ platí $e^{\mathbf{A}t} = a_0(t)\mathbf{E} + a_1(t)\mathbf{A} + \ldots + a_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}$.

Poznámka *Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$ a $h(\mathbf{A})$ je polynóm matice $\mathbf{A}$. Ak λ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$, tak $h(\lambda)$ je vlastná hodnota matice $h(\mathbf{A})$, t.j.*

$$\mathbf{Ar} = \lambda\mathbf{r}, \; h(\mathbf{A})\mathbf{r} = h(\lambda)\mathbf{r}$$

a

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r} = e^{\lambda t}\mathbf{r}$$

alebo

$$(a_0(t)\mathbf{E} + a_1(t)\mathbf{A} + \ldots + a_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1})\mathbf{r} = (a_0(t) + a_1(t)\lambda + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1})\mathbf{r}.$$

Porovnaním oboch strán pre $\lambda = \lambda_i$, dostávame

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_i + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} = e^{\lambda_i t} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Príklad *Nájdime exponenciál matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Charakteristická rovnica $\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$ má korene $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$.
Odpovedajúci systém lineárnych rovníc pre neznáme funkcie $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ je

$$
\begin{aligned}
e^{-t} &= a_0(t) + a_1(t)(-1) + a_2(t)(-1)^2, \\
e^{-2t} &= a_0(t) + a_1(t)(-2) + a_2(t)(-2)^2, \\
e^{3t} &= a_0(t) + a_1(t)(3) + a_2(t)(3)^2.
\end{aligned}
$$

Riešením dostávame

$$
a_0(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{3t}, \quad a_1(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^{3t},
$$
$$
a_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t}
$$

pričom

$$
e^{\mathbf{A}t} = a_0(t)\mathbf{E} + a_1(t)\mathbf{A} + a_2(t)\mathbf{A}^2.
$$

Modifikácia poslednej metódy je uvedená v knihe [26] Sinha, N.K strana 357. Ak niektorá vlastná hodnota λ_i matice $\mathbf{A}$, je násobnosti m a ($m \geq 2$), dostaneme systém m rovníc odpovedajúcich λ_i v tvare (derivujeme podľa λ_i prvú rovnicu):

$$
\begin{aligned}
a_0(t) + a_1(t)\lambda + \ldots \quad & + a_m(t)\lambda^m + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} && = \quad e^{\lambda_i t}, \\
a_1(t) + \ldots \quad & + m a_m(t)\lambda^{m-1} + \ldots + (n-1)a_{n-1}(t)\lambda^{n-2} && = \quad te^{\lambda_i t}, \\
& \ldots && = \quad \ldots. \\
& m!\,a_m(t) + \ldots + (n-1)\ldots(n-m)a_{n-1}(t)\lambda^{n-m-1} && = \quad t^m e^{\lambda_i t}.
\end{aligned}
$$

Výpočet $e^{\mathbf{A}t}$ pomocou Laplaceovej transformácie

Uvažujme systém lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a začiatočnými podmienkami $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Použitím Laplaceovej transformácie (pozri Prílohu), dostávame

$$
\mathbf{x}(t) = L^{-1}\left\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}_0.
$$

Pretože $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, potom je

$$
e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right\}.
$$

Príklad *Nájdime exponenciál matice*

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}
$$

Riešenie: Jednoduchým výpočtom dostávame

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s-10)}\begin{pmatrix} s-6 & 6 \\ 2 & s-7 \end{pmatrix}\right\}.$$

Teda

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}e^{3t}+\frac{4}{7}e^{10t} & \frac{-6}{7}e^{3t}+\frac{6}{7}e^{10t} \\ \frac{-2}{7}e^{3t}+\frac{2}{7}e^{10t} & \frac{4}{7}e^{3t}+\frac{3}{7}e^{10t} \end{pmatrix}.$$

Podobné matice a Jordanov kanonický tvar

Uvažujme systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

kde $\mathbf{A}$ je štvorcová konštantná matica $n \times n$. Transformáciou premenných $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, kde $\mathbf{T}$ je nejaká regulárna konštantná matica, transformujeme systém $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ na systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

kde $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Našim cieľom je nájsť maticu $\mathbf{T}$ tak aby matica $\mathbf{B}$ bola čo najvhodnejšia pre výpočet exponenciálu matice $\mathbf{A}$.

Hovoríme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú podobné (označujeme to takto $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$), vtedy a len vtedy, ak existuje regulárna matica $\mathbf{T}$ taká, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Podobné matice majú ten istý charakteristický polynóm:

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{T}) =$$
$$= \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E})\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E})$$

Matica $\mathbf{A}$ sa nazýva diagonazovateľna , ak $\mathbf{A}$ je podobná s diagonálnou maticou. Ak matica $\mathbf{A}$ má navzájom rôzne vlastné hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potom odpovedajúce k ním vlastné vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ sú nezávislé a

$$\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n),$$

pričom stĺpce tvoria vlastné vektory. Matica $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ je diagonálna matica v tvare

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Príklad *Nájdime kanonický tvar systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Riešenie: Použijúc výsledky Príkladu 1.5.1, dostávame charakteristickú rovnicu

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

s koreňmi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Vlastné vektory

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoria stĺpce transformačnej matice $\mathbf{T}$, teda

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom dostaneme $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}$, kde

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vo všeobecnosti, matica $\mathbf{A}$ nemusí mať n odpovedajúcich lineárne nezávislých vlastných vektorov. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$ s násobnosťami $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Nech X_j je podpriestor priestoru E_n generovaného systémom $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})^{n_j} \mathbf{r} = \mathbf{0}$, pre $j = 1,2,\ldots,k$. Nech matica $\mathbf{T}$ je definovaná nasledovne:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12}, \ldots, \mathbf{r}_{1n_1}, \ldots, \mathbf{r}_{k1}, \mathbf{r}_{k2}, \ldots, \mathbf{r}_{kn_k})$$

kde $\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12}, \ldots, \mathbf{r}_{1n_1}, \ldots, \mathbf{r}_{k1}, \mathbf{r}_{k2}, \ldots, \mathbf{r}_{kn_k}$ je nejaká báza X_j, $j = 1,2,\ldots,k$. Potom

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{B}_k \end{pmatrix}$$

a matice $\mathbf{B}_j$ sú štvorcové matice $n_j \times n_j$.

Veta 1.7.1 (Jordanova kanonická forma) *Pre každú komplexnú, konštantnú, štvorcovú maticu* $n \times n$ *maticu* $\mathbf{A}$ *existuje regulárna matica* $\mathbf{T}$ taká, že matica $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ *má kanonickú formu*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & & & 0 \\ & \mathbf{J}_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{J}_0$ *je diagonálna matica s diagonálnymi prvkami* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *(nemusia byť rôzne)*

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

a každá matica $\mathbf{J}_p$ *je štvorcová matica* $n_p \times n_p$

$$\mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} \lambda_{k+p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k+p} \end{pmatrix} \quad (p = 1,2,\ldots,s).$$

Ak poznáme kanonický tvar matice $\mathbf{J}$, prvky matice $\mathbf{T}$ vždy nájdeme riešením systému rovníc $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{J}$.

Dostávame

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_0 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{J}_1 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\mathbf{J}_s t} \end{pmatrix}$$

pre $t \in (-\infty, \infty)$ a

$$\mathbf{J}_p = \lambda_{k+p}\mathbf{E}_\mathbf{p} + \mathbf{N}_\mathbf{p}$$

kde $\mathbf{E_p}$ je jednotková matica $n_p \times n_p$ a $\mathbf{N_p}$ je matica $n_p \times n_p$ tvaru

$$\mathbf{N_p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Zrejme matice $\lambda_{k+p}\mathbf{E_p}$ a $\mathbf{N_p}$ sú komutatívne, a preto

$$e^{\mathbf{J_p}t} = e^{\lambda_{k+p}t} e^{\mathbf{N_p}t},$$

a

$$e^{\mathbf{J_p}t} = e^{\lambda_{k+p}t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$