1.1 Niektoré vlastnosti matíc

Nech m a n sú dve prirodzené čísla. Schému $m \cdot n$ čísel zostavenú do m riadkov a n stĺpcov nazývame **maticou** o m riadkoch a n stĺpcoch alebo maticou typu $m \times n$.

$$A = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nulovou maticou nazývame maticu ***O***, ktorej všetky prvky sú nulové.

Ak je matica ***A*** typu $n \times n$ t.j. má rovnaký počet riadkov a stĺpcov, hovoríme, že ***A*** je **štvorcová matica** stupňa *n.* Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ nazývame prvky hlavnej diagonály matice ***A***.

Štvorcová matica, ktorej všetky prvky neležiace na hlavnej diagonále sú rovné nule, sa nazýva **diagonálna matica**.

Diagonálna matica, ktorej prvky hlavnej diagonály sú rovné jednej, sa nazýva **jednotkovou maticou.**

Lichobežníkovým tvarom matice rozumieme maticu, ktorej všetky prvky $a_{ij} = 0$ pre $i > j$.

Nech matica *A* je matica typu $m \times n$.

$$\text{Maticu } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu $n \times m$ nazývame **transponovanou maticou** k matici *A.*

Operácie s maticami:

- Dve matice **A** a **B sa rovnajú**, ak sú rovnakého typu $m \times n$ a platí $a_{ij} = b_{ij}$ pre $i = 1,2,\dots m$, $j = 1,2,\dots n$.
- **Súčtom dvoch matíc A** a **B** rovnakého typu $m \times n$ rozumieme maticu **C** typu $m \times n$, ak platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pre $i = 1,2,\dots m$, $j = 1,2,\dots n$.
- **Súčinom matice A** typu $m \times n$ **s číslom** α rozumieme maticu **C** typu $m \times n$, ak platí $c_{ij} = \alpha \cdot c_{ij}$ pre $i = 1,2,\dots m$, $j = 1,2,\dots n$.
- Nech matica **A** je typu $m \times n$ a matica **B** je typu $n \times r$. **Súčinom matíc** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ v danom poradí rozumieme maticu *C* typu $m \times r$, kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ pre $i = 1,2,\dots m$, $j = 1,2,\dots r$.

]

Determinant matice

Nech **A** je štvorcová matica rádu *n*. **Determinantom** matice **A** rozumieme číslo priradené štvorcovej matici **A** . Označujeme ho | **A** |, Δ**A** , *det* **A**

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Nech **A** je matica typu $n \times n$. Symbolom S_{ij} označujeme **submaticu**, ktorá vznikne z matice ***A*** vynechaním *i*-tého riadku a *j*-tého stĺpca.

Subdeterminantom | $\mathbf{S}_{ij}$ | k prvku a_{ij} determinantu matice **A** rozumieme determinant, ktorý vznikne z pôvodného determinantu vynechaním *i*-tého riadku a *j*-tého stĺpca.

Algebrický doplnok $\mathbf{A}_{ij}$ k prvku a_{ij} je súčin $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} | \mathbf{S}_{ij} |$.

Nech **A** je štvorcová matica rádu *n*. Determinantom matice **A** rozumieme číslo dané nasledovným spôsobom:

1. Ak **A** je matica prvého rádu , t.j. **A**=(a_{11}), tak | **A** | = $a_{11.}$
2. Ak $n > 1$, tak $|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| \mathbf{S}_{ij} \right|$, kde $1 \leq i \leq n$.

Pri výpočte determinantu podľa bodu 2 hovoríme, že počítame hodnotu determinantu **Laplaceovým rozvojom** podľa *i*-tého riadku.

Laplaceov rozvoj podľa *j*-tého stĺpca: $|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| \mathbf{S}_{ij} \right|$.

Dá sa ukázať, že ak $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2,2}$, tak determinant sa dá vypočítať pomocou tzv. **krížového pravidla**

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} .$$

Ak $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3,3}$, tak determinant sa dá vypočítať pomocou **Sarussovho pravidla**

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Inverzná matica a jej výpočet

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ je **regulárna**, ak $|\mathbf{A}| \neq 0$. V opačnom prípade, t.j. ak $|\mathbf{A}| = 0$, hovoríme, že matica **A** je **singulárna**.
Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ je regulárna matica. **Inverznou maticou** k matici **A** rozumieme štvorcovú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ takú, že $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. **E** je jednotková matica.
Z definície inverznej matice vyplýva, že **A** je inverzná k matici $\mathbf{A}^{-1}$, t.j. platí rovnosť $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Inverznú maticu môžeme vypočítať:

a) pomocou adjungovanej matice,
b) Gaussovou metódou.

a) **Adjungovanou maticou** k matici **A** nazývame maticu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ sú algebrické doplnky k prvkom a_{ij} matice **A**.
Ku každej regulárnej matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathcal{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

b) **Gaussova metóda** spočíva v tom, že:

- zapíšeme **rozšírenú** maticu, ktorá obsahuje maticu **A** a jednotkovú maticu **E**, t.j. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E})$,
- elementárnymi riadkovými úpravami upravujeme **rozšírenú** maticu dovtedy, kým z matice **A** nedostaneme jednotkovú maticu, dostaneme maticu $(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$.