4.9 Lineárne nehomogénne diferenčné rovnice s konštantnými koeficientmi

Všeobecné riešenie diferenčnej rovnice (4.6), pre niektoré špeciálne funkcie (špeciálna pravá strana) $f(n)$, nájdeme podobným spôsobom ako pri diferenciálnych rovniciach. Vo všeobecnosti môžeme použiť metódu variácie konštánt ale pre špeciálne pravé strany môžeme použiť metódu známu ako **metóda neurčitých koeficientov,** ktorá je často používaná pri riešení inžinierskych problémov.

Túto metódu môžeme aplikovať na nasledujúce pravé strany:
a) $f(n) = P_m(n)q^n$, $P_m(n)$ je diskrétny polynóm m-tého stupňa $m \geq 0$,
je reálna konštanta, potom partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej diferenčnej rovnice hľadáme v tvare

$$x^*(n) = n^s Q_m(n)q^n$$

kde $Q_m(n)$ je diskrétny polynóm m-tého stupňa s neurčitými koeficientmi a q je s násobným koreňom charakteristickej rovnice odpovedajúcej homogénnej diferenčnej rovnici.

Príklad 4.9.1 *Nájdime všeobecné riešenie rovnice*

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = n2^n.$$

Riešenie: Charakteristická rovnica pre homogénnu rovnicu je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_{12} = 2$ (s násobnosťou $s = 2$). Všeobecné riešenie homogénnej rovnice $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0$ je

$$x(n) = C_1 3^n + C_2 n3^n$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. Partikulárne riešenie $x^*(n)$, danej nehomogénnej diferenčnej rovnice hľadáme v tvare

$$x^*(n) = n^2(A + Bn)2^n.$$

Priamou substitúciou do rovnice, dostávame

$$4\left[A(n+2)^2 + B(n+2)^3\right] - 8\left[A(n+1)^2 + B(n+1)^3\right] + 4\left[An^2 + Bn^3\right] = n.$$

Porovnaním oboch strán, dostávame

$$A = -\frac{1}{8}, B = \frac{1}{24}.$$

Všeobecné riešenie danej nehomogénnej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = C_1 3^n + C_2 n 3^n + n^2(-\frac{1}{8} + \frac{1}{24}n)2^n .$$

b) $f(n) = \rho^n \left(P_{m_1}^{(1)}(n)\cos n\varphi + P_{m_2}^{(2)}(n)\sin n\varphi \right),$

kde $P_{m_1}^{(1)}(n), P_{m_2}^{(2)}(n)$ sú diskrétne polynómy stupňov m_1, m_2 a $\rho \neq 0$, je reálna konštanta. Potom partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$x^*(n) = n^s \left\{ Q_m^{(1)}(n)\cos n\varphi + Q_m^{(2)}(n)\sin n\varphi \right\} \rho^n ,$$

kde $Q_m^{(1)}(n), Q_m^{(2)}(n)$ sú polynómy m - tého stupňa, $m = \max(m_1, m_2)$ s neurčitými koeficientmi a

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

je s násobný koreň odpovedajúcej charakteristickej rovnice.

Príklad 4.9.2 Nájdime všeobecné riešenie rovnice

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \cos\frac{\pi n}{3}, n \geq 0 .$$

Riešenie: Korene charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

sú $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Partikulárne riešenie $x^*(n)$ hľadáme v tvare

$$x^*(n) = A\cos\frac{\pi n}{3} + B\sin\frac{\pi n}{3} .$$

Teda

$$x^*(n+1) = A\cos\frac{\pi(n+1)}{3} + B\sin\frac{\pi(n+1)}{3} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{\pi n}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{3} \quad .$$

$$x^*(n+2) = \left(-\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{\pi n}{3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{3} .$$

Priamou substitúciou do rovnice, dostávame

$$-\sqrt{3}B\cos\frac{\pi n}{3} + \sqrt{3}A\sin\frac{\pi n}{3} = \cos\frac{\pi n}{3} .$$

Riešením je $A = 0, B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, potom všeobecné riešenie je

$$x(n) = C_1 1^n + C_2 2^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi n}{3}.$$

c) $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$

Potom partikulárne riešenie je

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n),$$

kde $x_1^*(n)$ je nejaké partikulárne riešenie diferenčnej rovnice

$$a_0 x(n+k) + \ldots + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f_1(n)$$

a $x_2^*(n)$ je nejaké partikulárne riešenie diferenčnej rovnice

$$a_0 x(n+k) + \ldots + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f_2(n).$$

Príklad 4.9.3 Nájdime všeobecné riešenie diferenčnej rovnice

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \cos\frac{\pi n}{3} + 2.3^n.$$

Riešenie: Partikulárne riešenia $x_1^*(n), x_2^*(n)$ hľadáme v tvare

$$x_1^*(n) = A\cos\frac{\pi n}{3} + B\sin\frac{\pi n}{3}, x_2^*(n) = C3^n.$$

Potom dostávame

$$x_1^*(n) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi n}{3}, x_2^*(n) = 3^n$$

a všeobecné riešenie danej diferenčnej rovnice je

$$x^*(n) = C_1 1^n + C_2 2^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi n}{3} + 3^n.$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> r = maple('statement');
>> xn = maple('rsolve({x(n+2) = 3*x(n+1) - 2*x(n)+cos(pi*n/3)+2*3^n}, {x})')
xn =

{x(n) = -(x(0)-x(1))*2^n+2*x(0)-x(1)-3/2*2^n+1/2+3^n-14/9*cos(1/3*pi*(n-
2))+2*cos(1/3*pi*(n-3))-5/3*cos(1/3*pi*(n-4))+7/9*cos(1/3*pi*(n-5))}
```