4.13 Transformácia spojitých systémov na diskrétne

Často je potrebné nájsť model pre systém, kde časová premenná bude diskrétna, napodobňujúci priebeh, ktorý je popísaný pomocou spojitej časovej premennej.

Uvažujme systém diferenciálnych rovníc $\mathbf{x}'(t) = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t)$ s konštantnou maticou a danou začiatočnou podmienkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Partikulárne riešenie tohto systému má tvar

$$\mathbf{x}(t) = e^{\overline{\mathbf{A}}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0). \qquad (4.10)$$

Substitúciou $t_0 = n, t = n+1$ do (4.10), dostávame

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n),$$

kde $\mathbf{A} = e^{\overline{\mathbf{A}}}$.

Nech je daný teraz systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n) \qquad (4.11)$$

a potrebujeme nájsť riešenie $\mathbf{x}(n)$, pre danú začiatočnú podmienku $\mathbf{x}(0)$ a postupnosť hodnôt $\mathbf{f}(0), \mathbf{f}(1), \ldots, \mathbf{f}(n)$. Opakovanou aplikáciou vzťahu (4.11), ak začneme s $n = 0$, dostávame

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{f}(0),$$
$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{f}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{f}(0) + \mathbf{f}(1).$$

Uvedeným postupom sa dá ukázať, že

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{f}(n-i). \qquad (4.12)$$

Vidíme, že pre diskrétny systém matica $\mathbf{A}^n$, má podobnú úlohu ako matica $e^{\mathbf{A}t}$ pre spojité systémy. Matica $\mathbf{A}^n$ je fundamentálnou maticou pre diskrétny systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n)$.

Riešenie rovnice (4.11) môžeme nájsť tiež pomocou Z-transformácie, jej aplikáciou na obe strany rovnice (4.11) dostávame

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{F}(z) \qquad (4.13)$$

odtiaľ vypočítame $\mathbf{X}(z)$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}(z).$$

Použitím inverznej Z-transformácie dostávame

$$\mathbf{x}(n) = Z^{-1}\left\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z\right\}\mathbf{x}(0) + Z^{-1}\left\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{F}(z)\right\}. \qquad (2.14)$$

Ak porovnáme (4.14) a (4.12) vidíme, že

$$\mathbf{A}^n = Z^{-1}\left\{(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} z\right\}.$$

Vzhľadom na Cayley-Hamiltonovu vetu platí

$$\mathbf{A}^n = a_0(n)\mathbf{E} + a_1(n)\mathbf{A} + \ldots + a_{k-1}(n)\mathbf{A}^{k-1},$$

kde koeficienty $a_0(n), a_1(n), \ldots, a_{k-1}(n)$ sú riešenia systému rovníc

$$a_0(n) + a_1(n)\lambda_i + \ldots + a_{k-1}(n)\lambda_i^{k-1} = \lambda_i^n, i = 1,2,\ldots,m-1 \qquad (4.15)$$

pričom $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,k$ sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Tento výsledok môže byť zovšeobecnený na prípad viacnásobných vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$. Ak násobnosť vlastnej hodnoty λ_i matice $\mathbf{A}$, je m ($m \geq 2$), tak namiesto (4.15) použijeme modifikovaný systém. Systém m rovníc, odpovedajúci vlastnej hodnote λ_i, je :

$$\begin{aligned} & a_0(n) + a_1(n)\lambda_i + \ldots + a_{k-1}(n)\lambda_i^{k-1} = \lambda_i^n, \\ & \frac{d}{d\lambda_i}\left[a_0(n) + a_1(n)\lambda_i + \ldots + a_{k-1}(n)\lambda_i^{k-1}\right] = \frac{d}{d\lambda_i}\left[\lambda_i^n\right], \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & \frac{d^{m-1}}{d\lambda_i^{m-1}}\left[a_0(n) + a_1(n)\lambda_i + \ldots + a_{k-1}(n)\lambda_i^{k-1}\right] = \frac{d^{m-1}}{d\lambda_i^{m-1}}\left[\lambda_i^n\right]. \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Príklad *Nájdime riešenie systému*

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 4x(n) - y(n), \\ y(n+1) &= x(n) + 2y(n). \end{aligned}$$

Riešenie: Charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_{12} = 3$. Vzhľadom na (4.16) dostávame

$$\begin{aligned} a_0(n) + a_1(n).3 &= 3^n, \\ a_1(n) &= n3^n. \end{aligned}$$

Potom $a_0(n) = 3^n(1-n)$, $a_1(n) = n3^n$ a všeobecné riešenie je

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \left\{3^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n-1}(3+n) & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & 3^{n-1}(3-n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Výpočet matice $\mathbf{A}^n$ pomocou MAPLu :

```
>A:=Matrix([[4,-1],[1,2]]);
```

```
> with(LinearAlgebra):Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> solve ({a0+a1*3=3^n,a1=n*3^n},{a0,a1});
```

$$\{a1 = n\,3^n,\ a0 = 3^n - 3\,n\,3^n\}$$

```
> E:=Matrix([[1,0],[0,1]]): AnaN:=(3^n-3*n*3^n)*E+n*3^n*A;
```

$$AnaN := \begin{bmatrix} 3^n + n3^n & -n3^n \\ n3^n & 3^n - n3^n \end{bmatrix}$$