4.11 Systémy lineárnych diferenčných rovníc

Základné pojmy
Uvažujme systém k diferenčných rovníc s k neznámymi funkciami $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ tvaru

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + \ldots + a_{1k}x_k(n) + f_1(n), \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + \ldots + a_{kk}x_k(n) + f_k(n). \end{aligned}$$

Mnoho postupov pri riešení takýchto systémov diferenčných rovníc je podobných s postupmi, ktoré sme používali pri riešení sústav diferenciálnych rovníc v prvej kapitole.

Vektorový zápis daného systému je

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n), \qquad (4.8)$$

kde $\mathbf{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T$, a $\mathbf{A}$ je štvorcová matica $k \times k$. Ak $\mathbf{f}(n) \equiv \mathbf{0}$ systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) \qquad (4.9)$$

sa nazýva **homogénny systém.**
Funkcia $\mathbf{u}(n) = (u_1(n), u_2(n), \ldots, u_k(n))^T$ je riešením daného systému, ak spĺňa daný systém pre každé $n = 0,1,\ldots$

Uvažujme systém (4.8), a hľadajme riešenie v tvare

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{r}\lambda^n, \ \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)^T$, $\mathbf{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T$. Po dosadení do (4.8) vidíme, že $\mathbf{x}(n) = \mathbf{r}\lambda^n$ je riešením danej rovnice vtedy a len vtedy, ak

$$\lambda\mathbf{r}\lambda^n = \mathbf{A}\mathbf{r}\lambda^n.$$

Pretože $\lambda^n \neq 0$, dostávame

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Tento systém má nenulové riešenie vtedy a len vtedy, ak pre λ platí

$$P_k(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0.$$

Dostali sme charakteristickú rovnicu, podobne ako v prvej kapitole, pre homogénny systém diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Fundamentálny systém, všeobecné riešenie, partikulárne riešenie ako aj riešenie nehomogénneho systému sú definované podobne ako pre systémy diferenciálnych rovníc. Niektoré metódy riešenia uvedieme v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.11.1 *Riešme systém diferenčných rovníc*

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) + 2y(n) - 1, \\ y(n+1) &= -x(n) + 4y(n) + 3n. \end{aligned}$$

Riešenie: Riešenie homogénneho systému budeme hľadať v tvare

$$x(n) = \alpha\lambda^n,\ y(n) = \beta\lambda^n.$$

Substitúciou do daného systému (homogénneho), po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha + 2\beta &= 0, \\ -1\alpha + (4-\lambda)\beta &= 0. \end{aligned}$$

Odpovedajúca charakteristická rovnica

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

má korene $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. Pre $\lambda_1 = 3$, dostávame

$$\begin{aligned} (1-3)\alpha + 2\beta &= 0, \\ -1\alpha + (4-3)\beta &= 0. \end{aligned}$$

Riešením poslednej sústavy je napríklad dvojica $\alpha = 1, \beta = 1$. Podobne pre $\lambda_2 = 2$, dostávame $\alpha = 2, \beta = 1$.

Uvažujme teraz daný nehomogénny systém a hľadajme partikulárne riešenie v tvare $x^*(n) = An + B, y^*(n) = Cn + D$. Dosadením do daného nehomogénneho systému, dostávame

$$\begin{aligned} An + A + B &= An + B + 2Cn + 2D - 1, \\ Cn + C + D &= -An - B + 4Cn + 4D + 3n. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je $A = 3, B = 6, C = 0, D = 2$. Všeobecné riešenie daného systému je

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 3^n + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} 3n+6 \\ 0n+2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie pomocou MAPLu so známymi hodnotami $x(0), y(0)$:

```
> rsolve({x(n+1)  = x(n)+2*y(n)-1, y(n+1)  =-x(n)+4*y(n)+3*n
  }, {x, y});
```

$$\{y(n) = -4\,2^n + 2 + 2\,3^n - 2^n\,y(0) + 2^n\,x(0) + 2\,3^n\,y(0) - 3^n\,x(0),$$

$$x(n) = -8\,2^n + 6 + 2\,3^n + 3\,n - 2\,2^n\,y(0) + 2\,2^n\,x(0) + 2\,3^n\,y(0) - 3^n\,x(0)\}$$

Pre $x(0) = 0, y(0) = 0$ dostávame

```
> rsolve({x(n+1)  = x(n)+2*y(n)-1, y(n+1)  =-x(n)+4*y(n)+3*n
  ,x(0)=0,y(0)=0}, {x, y});
```

$$\{x(n) = -8\,2^n + 6 + 2\,3^n + 3\,n,\ y(n) = -4\,2^n + 2 + 2\,3^n\}$$

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>>r = maple('statement');syms x y n;
>> r=maple('rsolve({x(n+1)  = x(n)+2*y(n)-1, y(n+1)  =-x(n)+4*y(n)+3*n,x(0)=0,y(0)=0}, {x,
y})')
r =
{y(n) = 2*3^n-4*2^n+2, x(n) = 2*3^n-8*2^n+6+3*n}
```