4.10 Riešenie pomocou Z -transformácie

V nasledujúcom príklade ukážeme ako môžeme využiť niektoré vlastnosti Z -transformácie (pozri Prílohu Z) pri riešení diferenčných rovníc.

Príklad 4.10.1 *Nájdime partikulárne riešenie diferenčnej rovnice*

$$x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=5.4^n$$

ak $x(0)=x(1)=0$.

Riešenie: Aplikáciou Z -transformácie na danú diferenčnú rovnicu, dostávame

$$\begin{aligned} Z\left[x(n)\right] &= X(z),\\ Z\left[x(n+1)\right] &= zX(z)-zx(0)=zX(z),\\ Z\left[x(n+2)\right] &= z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)=zX(z),\\ Z\left[5.4^n\right] &= \frac{5z}{z-4} \end{aligned}$$

a

$$z^2X(z)-5zX(z)+6X(z)=\frac{5z}{z-4}.$$

Ak rovnicu riešime vzhľadom na $X(z)$, tak

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{5z}{(z-2)(z-3)(z-4)}=5z\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-4}\right)= \\ &= \frac{5}{2}\frac{z}{z-2}-5\frac{z}{z-3}+\frac{5}{2}\frac{z}{z-4}. \end{aligned}$$

Použijúc tabuľku pre Z- transformáciu (Príloha Z) a rozklad funkcie na parciálne zlomky, dostávame

$$x(n)=\frac{5}{2}2^n-5.3^n+\frac{5}{2}4^n\ .$$

Riešenie určíme pomocou rezíduí

$$\begin{aligned} x(n) &= res\left[X(z)z^{n-1},2\right]+res\left[X(z)z^{n-1},3\right]+res\left[X(z)z^{n-1},4\right]= \\ &= \frac{5}{2}2^n-5.3^n+\frac{5}{2}4^n. \end{aligned}$$

Riešenie pomocou MAPLu bez použitia Z- transformácie:

> **rsolve({x(n+2) = 5*x(n+1) - 6*x(n)+5*4^n,x(0)=0,x(1)=0}, {x});**

$$\{x(n) = \frac{5\,2^n}{2} - 5\,3^n + \frac{5\,4^n}{2}\}$$

Riešenie pomocou MATLABu s použitím Z – transformácie:

```
>> syms z n
>> Xz=5/2*z/(z-2)-5*z/(z-3)+5/2*z/(z-4)
>> xn=iztrans(X)
```

xn =

5/2*2^n-5*3^n+5/2*4^n