

10.2 Metódy predpovedí

Metóda klzavých priemerov

Tento model využíva priemer niekoľkých posledných y_{n-k} hodnôt v časovom rade na predpoveď (forecast F_{n+1}) nasledujúcej y_{n+1} hodnoty.

$$y_{n+1} = F_{n+1} = \frac{y_{n-m+1} + y_{n-m+2} + \dots + y_{n-1} + y_n}{m},$$

kde F_{t+1} je predpoveď pre čas $t+1$,
 y_t je hodnota v čase t ,
 m je počet hodnôt klzavého priemeru.

Exponenciálne vyrovnanie

Postupy vyrovňovania časového radu pomocou metódy najmenších štvorcov vychádzali z predpokladu, že v priebehu sledovanej doby sa nemenili parametre modelu (tzv. modely s nemennými parametrami). Adaptívne techniky naproti tomu konštruujú zložky časového radu pomocou charakteristík, ktoré menia v priebehu času svoje hodnoty.

Jednoduchou metódou krátkodobého prognózovania je **exponenciálne vyrovnanie**. Exponenciálne vyrovnanie nie je nahradenie trendu pomocou exponenciálnej funkcie. Výpočet vyrovnanej hodnoty je tu založený na všetkých minulých hodnotách y_{t-k} , $k = 0, 1, \dots, n-1$, kde jednotlivé hodnoty k interpretujeme ako vek pozorovania vzhľadom na moment n , t.j. čím je väčšie k , tým je staršie pozorovanie a jeho vplyv na budúcu hodnotu je menší (prikladáme mu menšiu váhu).

Hodnotu trendovej zložky Tr_{n-k} môžeme vyjadriť pomocou funkcie

$$Tr_{n-k} = a_0 - a_1 k + a_2 k^2 + \dots + (-1)^k a_k k^k, \text{ kde } y_{n-k} = Tr_{n-k} + \varepsilon_{n-k}.$$

Odhady parametrov a_0, \dots, a_k modelu získame metódou najmenších štvorcov, kde

$$S(a_0, \dots, a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{n-k} - Tr_{n-k})^2 \cdot \alpha^k = \min.$$

$w_k = \alpha^k$, $0 < \alpha < 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ sú váhy a veličina α sa nazýva **vyrovňavacia konštanta**.

- Ak v krátkych úsekoch môžeme trend považovať za konštantný, hovoríme o **jednoduchom vyrovňovaní**.
- Ak trend v jednotlivých úsekoch považujeme za lineárny, hovoríme o **dvojitom exponenciálnom vyrovňovaní**.
- Ak by úseky mali približne kvadratický trend, hovoríme o **trojitom exponenciálnom vyrovňovaní**.

Pre jednoduché exponenciálne vyrovňovanie je $Tr_{n-k} = a_0$. Potom sústava normálových rovníc sa redukuje na jednu rovnicu

$$a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{n-k}.$$

Pre dostatočne veľké n (použitím vzorca pre súčet geometrického radu dostávame)

$$a_0 \frac{1}{1-\alpha} \approx a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{n-k}.$$

Pre budúcu hodnotu F_{n+1} uvažujeme $F_{n+1} = a_0 = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{n-k}$.

Tento výraz môžeme upraviť na tvar $F_{n+1} = a_0 = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k S_{n-k}$,

kde S_{n-k} označuje vyrovnanú (modelovú) hodnotu v čase $n-k$. Výhodnejší tvar pre výpočet je

$$S_{n-k} = (1-\alpha)y_{n-k} + \alpha S_{n-k-1}, \text{ kde } S_1 = y_1.$$

Potom za budúcu hodnotu (predpoveď) pre $n+1$ berieme $F_{n+1} = S_n$.

Teda

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 \\ S_2 &= (1-\alpha)y_2 + \alpha S_1 \\ S_3 &= (1-\alpha)y_3 + \alpha S_2 \\ &\dots\dots\dots \\ F_{n+1} &\approx S_n = (1-\alpha)y_n + \alpha S_{n-1}. \end{aligned}$$


Príklad 10.1 Časový rad daný tabuľkou vyjadruje produkciu istej spoločnosti za uvedené obdobie. Určíme odhad produkcie v marci roku 2006.


rok	2005												2006	
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mes.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	I.	II.
prod.	125,7	129,4	134,7	135	140,2	141,7	138,4	135,3	130,9	130,2	131,8	128,2	127,3	129,3

Riešenie:

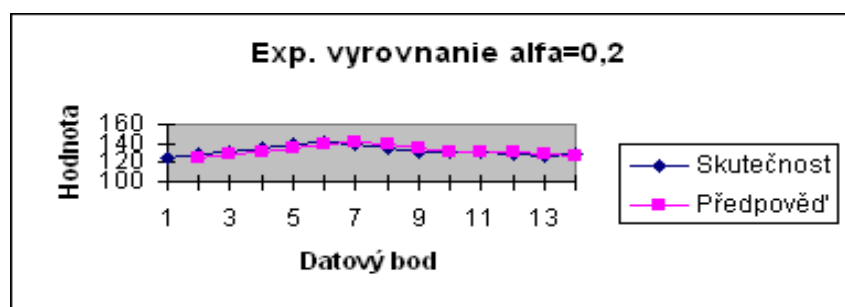
Využitím príkazu *Nástroje - Analýza dát - Exponenciálne vyrovňanie*:
Koeficient útlmu - vyrovňavacia konštanta

Exponenciální vyrovnání

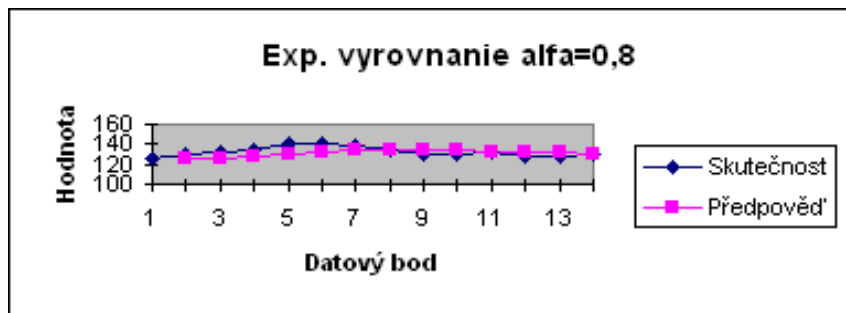
Vstup
 Vstupní oblast: 
 Koefficient útlumu:
☐ Popisky

Možnosti výstupu
 Výstupní oblast: 
 Nový list:
 Nový sešit:
☐ Vytvořit graf ☐ Standardní chyby

OK Storno Nápořádá



t	y_t	$Tr_t, \alpha = 0,2$	$Tr_t, \alpha = 0,8$	$y_t - Tr_t, \alpha = 0,2$	$(y_t - Tr_t)^2, \alpha = 0,2$	$y_t - Tr_t, \alpha = 0,8$	$(y_t - Tr_t)^2, \alpha = 0,8$
1	125,7	#####	#####				
2	129,4	125,7	125,7	3,7	13,69	3,7	13,69
3	131,7	128,66	126,44	3,04	9,2416	5,26	27,6676
4	135	131,092	127,492	3,908	15,27246	7,508	56,37006
5	140,2	134,2184	128,9936	5,9816	35,77954	11,2064	125,5834
6	141,7	139,00368	131,2349	2,69632	7,270142	10,46512	109,5187
7	138,4	141,160736	133,3279	-2,76074	7,621663	5,072096	25,72616
8	135,3	138,9521472	134,3423	-3,65215	13,33818	0,957677	0,917145
9	130,9	136,0304294	134,5339	-5,13043	26,32131	-3,63386	13,20493
10	130,2	131,9260859	133,8071	-1,72609	2,979372	-3,60709	13,01108
11	131,8	130,5452172	133,0857	1,254783	1,57448	-1,28567	1,652946
12	128,2	131,5490434	132,8285	-3,34904	11,21609	-4,62854	21,42334
13	127,3	128,8698087	131,9028	-1,56981	2,464299	-4,60283	21,18603
14	129,3	127,6139617	130,9823	1,686038	2,842725	-1,68226	2,830008
Suma				4,07849	149,6119	24,72905	432,7814
15	128,9628						
16	130,6458						



Pre vyrovnávaciu konštantu $\alpha = 0,2$ dostávame:

- Predpokladaná produkcia v marci je 128,9628.
- Priemerná chyba rezíduí je $M.E. = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{13} (y_t - Tr_t) = \frac{4,07849}{13} = 0,31373$.
- Priemerná kvadratická chyba rozptylu je $M.S.E. = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{13} (y_t - Tr_t)^2 = \frac{149,6119}{13} = 11,5086$.
- Štandardná odchýlka rezíduí je $Root\ M.S.E. = \sqrt{M.S.E} = 3,3924$.
- Relatívna absolútna chyba rezíduí je

$$M.A.P.E. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_t - Tr_t}{y_t} \right| \times 100\% = \frac{0,302724}{13} \times 100\% = 2,3286\% .$$

- Relatívna chyba rezíduí je

$$M.P.E. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_t - Tr_t}{y_t} \times 100\% = \frac{12,97297}{13} \times 100\% = 99,7921\% .$$

Pre vyrovnávaciu konštantu $\alpha = 0,8$ dostávame:

- Predpokladaná produkcia v marci je 136,458.
- Priemerná chyba rezíduí je $M.E. = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{13} (y_t - Tr_t) = \frac{24,72905}{13} = 1,9022$.
- Priemerná kvadratická chyba rozptylu je $M.S.E. = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{13} (y_t - Tr_t)^2 = \frac{432,7814}{13} = 33,2909$.
- Štandardná odchýlka rezíduí je $Root\ M.S.E. = \sqrt{M.S.E} = 5,7698$.
- Relatívna absolútna chyba rezíduí je

$$M.A.P.E. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_t - Tr_t}{y_t} \right| \times 100\% = \frac{0,4721551}{13} \times 100\% = 3,6319\% .$$

- Relatívna chyba rezíduí je

$$M.P.E. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_t - Tr_t}{y_t} \times 100\% = \frac{0,171168}{13} \times 100\% = 1,3167\% .$$

Iná možnosť nájdenia predpovede na mesiac marec je:

- Pre $\alpha = 0,2$ dostávame $0,8 \times 129,3 + 0,2 \times 130,9823 = 129,6365$.
- Pre $\alpha = 0,8$ dostávame $0,2 \times 129,3 + 0,8 \times 130,9823 = 130,6458$.

Dôležité je nájsť najlepšiu vyrovnávaciu konštantu α , t.j. hodnotu ktorej bude odpovedať najmenšia kvadratická chyba M.S.E. signalizujúca nájdenie najlepšieho modelu pre dané namerané hodnoty. To znamená, že v našom prípade je výhodnejšia predpoveď pomocou modelu pre $\alpha = 0,2$. Pri hľadaní najlepšieho odhadu koeficientu α začíname výpočet obyčajne s krokom 0,05 alebo s krokom 0,1. Niektoré štatistické programy (napríklad STATGRAPHICS ale namiesto α vkladáme $1 - \alpha$) vedú automaticky nájsť najlepšie α .

Predpokladajme, že trend analyzovaného časového radu je lineárny. Pre určenie trendovej zložky použijeme **dvojitě exponenciálne vyrovnanie** t.j. $T_{n-k} = a_0 - a_1 k$. Potom

$$S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{n-k} - a_0 - a_1 k)^2 \cdot \alpha^k = \min.$$

Odpovedajúca sústava normálových rovníc pre metódu najmenších štvorcov je

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{n-k} &= a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k - a_1 \sum_{k=0}^{n-1} k \alpha^k, \\ - \sum_{k=0}^{n-1} k \alpha^k y_{n-k} &= -a_0 \sum_{k=0}^{n-1} k \alpha^k + a_1 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \alpha^k. \end{aligned}$$

Okrem presného výpočtu sa používa odhad koeficientov a_0, a_1 [16]

$$a_0 \approx (1 - \alpha) S_n - S_n^+, \quad a_1 \approx (1 - \alpha) S_n - \frac{1 - \alpha}{\alpha} S_n^+,$$

kde

$$S_n = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{n-k}, \quad S_n^+ = (1 - \alpha)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \alpha^k y_{n-k}.$$