

5.7 Logistický trend

Logistický trend je najčastejšie udávaný v tvare

$$Tr_t = \frac{k}{1 + a_0 a_1^t}, \quad a_0 > 1, \quad 0 < a_1 < 1, \quad k > 0.$$

Po úprave dostávame

$$Tr_t = \frac{1}{K + A_0 a_1^t}, \quad A_0 = \frac{a_0}{k}, \quad K = \frac{1}{k}.$$

- Pre odhad parametrov použijeme metódu diferenčných odhadov parametrov A_0, K, a_1 . Trend Tr_t nahradíme skutočnými údajmi daného časového radu y_t . Dostávame

$$y_t = \frac{1}{K + A_0 a_1^t} \text{ a po derivovaní a úprave je } \frac{dy_t}{dt} = -y_t(1 - Ky_t) \ln a_1.$$

- Nahradením derivácie y'_t pomocou diferencií (krok $h = 1$) a po úprave dostávame

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = z_t = B_0 + B_1 y_t, \quad B_0 = -\ln a_1, \quad B_1 = K \ln a_1.$$

- Použitím metódy najmenších štvorcov určíme koeficienty B_0, B_1 ako aproximáciu hodnôt

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \text{ pomocou hodnôt } y_t. \text{ Takto sme približne určili hodnoty parametrov}$$

$$a_1 = e^{-B_0}, \quad K = -\frac{B_1}{B_0}.$$

- Logaritmovaním $K + A_0 a_1^t = \frac{1}{y_t}$ a úpravou dostávame

$$\ln\left(\frac{1}{y_t} - K\right) = u_t = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 t, \quad \bar{C}_0 = \ln A_0, \quad \bar{C}_1 = \ln a_1.$$

Pre výpočet koeficientov \bar{A}_0, \bar{A}_1 použijeme metódu najmenších štvorcov, pričom položíme

$$a_0 = -\frac{B_1}{B_0} e^{\bar{A}_0}, \quad a_1 = \frac{1}{2} (e^{C_0} + e^{-B_0}), \quad k = -\frac{B_0}{B_1}.$$

Koeficient a_1 sme vypočítali dvakrát, pričom môžeme dostať dva rôzne výsledky (možná zlá podmienenosť sústavy rovníc pri metóde najmenších štvorcov), ak nie sú rozdiely „veľké“, zoberieme aritmetický priemer získaných hodnôt.

Príklad 5.7 K dispozícii máme 15 mesačných údajov o množstve predaných výrobkov určitej spoločnosti v jej špecializovanej predajni.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	5	7	9	15	25	40	65	82	94	99	103	106	106	106	107

Nájdime logistický trend daného časového radu.

Riešenie:

Vývoj popíšme pomocou logistickej trendovej funkcie. Riešenie pomocou metódy najmenších štvorcov je uvedené v nasledujúcej tabuľke:

t	y_t	$y_{t+1} - y_t$	$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}$	$\ln\left(\frac{1}{y_t} - K\right)$	Tr_t	$(Tr_t - y_t)^2$	$\ln\left(\frac{1}{Tr_t} - K\right)$
1	5			-1,651019455	6,5407	2,37375649	-1,932796666
2	7	2	0,285714286	-2,004620826	9,6054	6,78810916	-2,343801896
3	9	2	0,222222222	-2,273362917	13,9339	24,3433692	-2,754805133
4	15	6	0,4	-2,838371514	19,8703	23,7198221	-3,165800415
5	25	10	0,4	-3,446585341	27,6924	7,24901776	-3,576801882
6	40	15	0,375	-4,083154079	37,4723	6,38926729	-3,987804276
7	65	25	0,384615385	-4,928294642	48,9284	258,296327	-4,398804372
8	82	17	0,207317073	-5,509200353	61,3668	425,728942	-4,809804081
9	94	12	0,127659574	-5,99446101	73,8055	407,81783	-5,220777652
10	99	5	0,050505051	-6,237246277	85,2646	188,661213	-5,631779065
11	103	4	0,038834951	-6,46117379	95,0485	63,2263522	-6,042781181
12	106	3	0,028301887	-6,654521457	102,8747	9,76750009	-6,453777521
13	106	0	0	-6,654521457	108,815	7,924225	-6,864782499
14	106	0	0	-6,654521457	113,1465	51,0724623	-7,275781147
15	107	1	0,009345794	-6,725419909	116,2135	84,8885822	-7,686782238

Tvar logistickej funkcie je

$$Tr_t = \frac{122,7596366}{1 + 26,80122 \cdot 0,662986484^t}$$

Hodnoty hľadaných parametrov môžeme spresniť pomocou Marquardovho postupu. Môžeme tak dosiahnuť lepšiu výsledok (stredná kvadratická odchýlka). Naše riešenie by sme považovali za prvé priblíženie. Marquardova metóda je využívaná napríklad v programe STATGRAPHIC (pozri Hindls). Pomocou tohto programu by sme dostali:

$$Tr_t = \frac{107,07738}{1 + 131,205665 \cdot 0,472279^t}$$

Iný spôsob nájdenia logistickej funkcie je odhad parametrov pomocou metódy vybraných bodov. Vyberieme tri pozorovania y_t , y_{t+m} , y_{t+2m} . Odhady parametrov k , a_0 , a_1 určíme z rovníc

$$y_t = \frac{k}{1 + a_0 a_1^t}, \quad y_{t+m} = \frac{k}{1 + a_0 a_1^{t+m}}, \quad y_{t+2m} = \frac{k}{1 + a_0 a_1^{t+2m}},$$

$$\frac{a_0}{k} = \frac{a_1 - 1}{(a_1^m - 1)^2} \left(\sum_{t=m+1}^{2m} \frac{1}{y_t} - \sum_{t=1}^m \frac{1}{y_t} \right),$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\sum_{t=1}^m \frac{1}{y_t} - \frac{a_0}{k} a_1 \frac{a_1^m - 1}{a_1 - 1}}{m}.$$

Tieto vzorce sú uvedené napríklad v práci [Jarošová, E.: STATISTIKA B-Řešené příklady. Ed. odd. VŠE Praha, 1996. ISBN 80-7079-328-7].