MATICE

pondelok 16. novembra 2026 9:18

MATICE

Definícia

Maticou typu $m \times n$ rozumieme sústavu prvkov zapísaných do tabuľky (schémy) s m riadkami a n stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde a_{ij} sú prvky matice, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.
Skrátené označenie $A = (a_{ij})$.

matica A typu $m \times n$ → počet stĺpcov
↓ počet riadkov

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

← 1. riadok matice

a_{11} → 1. riadok a 1. stĺpec

a_{12} → 1. riadok a 2. stĺpec

skrátený zápis $A = (a_{ij})$

4. riadok a 3 stĺpec a_{43}

príklady:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ typu 2×3

$a_{11} = 2$
a_{33} nie je v tejto matici
$a_{22} = -1$

a_{ij}
i... číslo riadku
j... číslo stĺpca

príklad: je štvorcová ← $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ typu 2×2

A, B nie sú rovnakého typu.

submatica matice A je napr.! (vynechám 1. riadok a 1. stĺpec)

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ matica typu 1×2

Základné vlastnosti matíc

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)

- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \dots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\vec{x} = k_1 \vec{a_1} + k_2 \vec{a_2} + \dots + k_n \vec{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$

príkl. $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (0, 3, 4)$, ... typ 1×3

príklad: stĺpcový vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ typ 3×1

príklad: lineárna kombinácia vektorov. (LK)

majme dané vektory $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

vyjadrime LK týchto vektorov pomocou čísel $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $k_3 = 1$

$$k_1 \vec{a_1} + k_2 \vec{a_2} + k_3 \vec{a_3} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+1 \\ 4+0+2 \\ 6-12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

vektor je LK vektorov $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály ($a_{ij} = a_{ji}$)
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Stupňovitá matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim

príklady: nulová matica napr. typu 2×3 → riadky, stĺpce

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pr. diagonálna matica stupňa 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ← diagonála matice

diagonála matice $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$

pr. jednotková matica stupňa 2

- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^t = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Stupňovitá matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

pr. jednotková matica stupňa 2

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pr. symetrická matica ↓ štvorcová ; $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = a_{21}$
$a_{13} = a_{31}$
$a_{23} = a_{32}$

pr. TRANSPONOVANÁ MATICA k matici $A=(a_{ij})$ typu $m \times n$ je matica $A^T = (a_{ji})$ typu $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 2\times 3 \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad 3\times 2$$

! vymením riadky ↔ stĺpce.

pr. HORNÁ TROJUHOLNÍKOVÁ MATICA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 158 & 26 \\ 0 & 2 & 500 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

pr. STUPŇOVITÁ MATICA ← pod každým prvým nenulovým prvkom v riadku musia byť nuly.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ nie je v stupňovom tvare

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ je v stupňovitom tvare

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nie je v stupňovitom tvare

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je v stupňovom tvare

OPERÁCIE S MATICAMI

1. SÚČET MATÍC

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Súčtom matíc $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ typu $m \times n$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = A + B$

!! ak chcem matice sčítavať, musia byť rovnakého typu !!

$A = (a_{ij})$ typu $m \times n$
$B = (b_{ij})$ typu $m \times n$
$A + B = C = (c_{ij})$; $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

napr. $c_{11} = a_{11} + b_{11}$
$c_{12} = a_{12} + b_{12}$
⋮

príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 2\times 3 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 2\times 3$$

vypočítajme $A + B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-1 & 3+0 \\ 4+4 & 5+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

2. NÁSOBENIE MATICE ČÍSLOM

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a k je konštanta. k-násobkom matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú platí

$$c_{ij} = k\, a_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = k \,.\, A$

príklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ vypočítajme $(-3).A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3.1 & -3.2 \\ -3.3 & -3.4 \\ -3.5 & -3.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$

3. SÚČIN MATÍC

Definícia

Nech $m, n, r \in \mathbb{N}$. Súčinom matíc $A = (a_{ij})$ typu $m \times r$ a matice $B = (b_{ij})$ typu $r \times n$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú platí

$$c_{ij} = a_{i1} \,.\, b_{1j} + a_{i2} \,.\, b_{2j} + \ldots + a_{ir} \,.\, b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \,.\, b_{kj},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = A \,.\, B$

? kedy môžem matice A a B násobiť ?
(a_{ij}) (b_{ij})
typu $m \times r$ typu $r \times n$
počet stĺpcov 1. matice = počet riadkov druhej matice!

kedy môžem počítať $A.B$ $m \times r$ $r \times n$

? ako násobím matice ?

$C = A.B$ typu $m \times n$ (c_{ij})

prvok c_{ij} vznikne tak, že „NÁSOBÍM" i-ty riadok matice A $(a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ir})$ s j-tym stĺpcom matice B $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{rj} \end{pmatrix}$ $r \times n$ ↓ počet riadkov

$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots a_{ir}.b_{rj}$

príklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 3×2 $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 2×3

áno, môžeme počítať $A.B$

1. riadok x 2. stĺpec

$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-1)+2.2 & 1.3+2.4 & 1.5+2.3 \\ 3.(-1)+(-1).2 & 3.3+(-1).4 & 3.5+(-1).3 \\ 0.(-1)+4.2 & 0.3+4.4 & 0.5+4.3 \end{pmatrix} =$

c_{11} c_{12} c_{13} c_{21} c_{22} c_{23} c_{31} c_{32} c_{33}

$= \begin{pmatrix} 3 & 11 & 11 \\ -5 & 5 & 12 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix}$ typu 3×3

? $B.A$?
2×3 3×2
áno

príklad: A typu 3×2
B typu 2×5
? viem vypočítať $A.B$? ÁNO, výsledok je matica typu 3×5 $A.B$

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

- zmena poradia riadkov (stĺpcov),
- vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
- pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Definícia

Dve matice A a B budeme nazývať riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav.
Označenie $A \sim B$.

ekvivalentné matice

$A \sim B$

prevediem jednu na druhú sériou ekvivalentných úprav

príklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. ekvivalentná úprava v jednoduchšej forme = pripočítam násobok iného riadku k inému riadku.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-3) \sim \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-3) \leftarrow + \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

HODNOSŤ MATICE

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Hodnosť matice A typu $m \times n$ je počet nenulových riadkov matice A upravenej na stupňovitý tvar.
Označenie $h(A)$.

príklad: Určme hodnosť matice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-3) \leftarrow + \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-2) \leftarrow + \cdot (-4) \leftarrow +$$

najprv si dám 1 na diagon. miesto v 1. riadku (aby hlavný prvok bol 1, lebo pod 1 sa ľahšie nuluje)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & +3 \end{pmatrix} \leftarrow + \leftarrow + \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}$$

matica je upravená na stupňovitý tvar

$$h(A) = 2$$