9. týždeň 1. zápočtová previerka
ukončené skupiny 10. týždeň

TEORIA
PRÍKLADY

(15b) → je vzorový TEST → ktorý
(45b) vzorová previerka na stránke KMTI | predmet MAT 1 | prílohy

obsah: 1. až 7. prednáška
- funkcia (def, $\mathcal{D}(f)$, $H(f)$, základné vlastnosti)
- limita funkcie (výpočet limít:
  napr. $\frac{1}{0^-} \to -\infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{1x^2-1} = 3$
- spojitosť funkcie (definícia, vlastnosti spojitej funkcie na $\langle a,b\rangle$, ...
- asymptoty grafu funkcie (ABS, ASS) definícia, +výpočet
- DERIVÁCIA FUNKCIE (definícia, vzťah derivácia a spojitosť, pravidlá pre derivovanie)
- vlastnosti + aplikácie derivácie: veľký znázornom, do cmica a normála, L'Hospitalo | pravidlá
- priebeh funkcie (vlastnosti funkcie vyšetrované pomocou $f'(x)$, $f''(x)$) SB, IB

TEST:
- výber z možností, len jedna bude správna
- resp. doplnenie definícií, pravidiel vety
  $[f\cdot g]' = \ldots + \ldots$

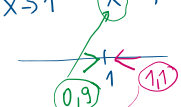
napr. ak $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ potom je funkcia f na intervale I
a) konštantná
b) rastúca
c) párna
d) klesajúca

pokračovanie: priebeh funkcie
PRÍKLAD: Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.
($\mathcal{D}(f)$, ABS, ASS, párnosť, nepárnosť, monotónnosť, lokálne extrémy, konvexnosť, konkávnosť, IB) a načrtnime graf funkcie.

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$ | $x^2-1 \neq 0$, $x^2 \neq 1$

ABS $x = 1$ | $x = -1$ sú MOŽNÉ ABS

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ áno $x=1$ je ABS



$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x = -1$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x=-1$ je ABS



$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty$

ASS $x \to \infty$ hľadám $y = kx + q$.

$x \to 1^{\cdots}$ $(\cdots)$ $\cdots$ 0 | $x \to -1^{\cdots}$ (x^2-1) 0

ASS pre $x \to \infty$ hľadám $y = kx + q$

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$ (2 ak $k = \infty$ neexistuje ASS)

$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

$y = x$ je ASS pre $x \to \infty$

pre $x \to -\infty$ hľadám $y = kx + q$

$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots$ rovnaký výpočet $= 1$

$q = \dots$ rovnaký výpočet ako pre $x \to \infty$ $= 0$

$y = x$ je ASS pre $x \to -\infty$

PÁRNOSŤ I NEPÁRNOSŤ FUNKCIE

1. $\mathcal{D}(f)$ musí byť „pekný" (symetrický podľa 0) ANO $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ aj $-x \in \mathcal{D}(f)$ $\quad \mathcal{D}(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{(-1)^3 \cdot x^3}{(-1)^2 \cdot x^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2-1}$

P: $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$

N: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$

? $f(x) = f(-x)$? → neplatí, teda f nie je PÁRNA

$-f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$

? $f(-x) = -f(x)$? ← ÁNO, $f(x)$ je nepárna (graf bude súmerný podľa bodu $[0,0]$)

MONOTÓNNOSŤ + LOK. EXTRÉMY:

$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

určíme nulové body $f'(x)$, tzv. STACIONÁRNE BODY:

$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$

$\Updownarrow$

$x^2 \cdot (x^2-3) = 0$

$x_1 = 0$ SB alebo $x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x_2 = -\sqrt{3}$ SB, $x_3 = \sqrt{3}$ SB

TABUĽKA pre monotónnosť a lok. extrémy

$\mathcal{D}(f)$	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. MAX	↘	↘		↘	↘	lok. MIN	↗

$[-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$ $\qquad$ $[\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$

$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Rovnosť lok.

rovnosť $f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

lok. min → $f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

KONVEXNOSŤ, KONKÁVNOSŤ + INFLEXNÉ BODY

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = f''$$

nulové body $f''(x)$: $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$

MOŽNÉ IB

$\Updownarrow$

$2x(x^2+3) = 0$

ak $x = 0$ lebo $x^2 + 3 \neq 0$

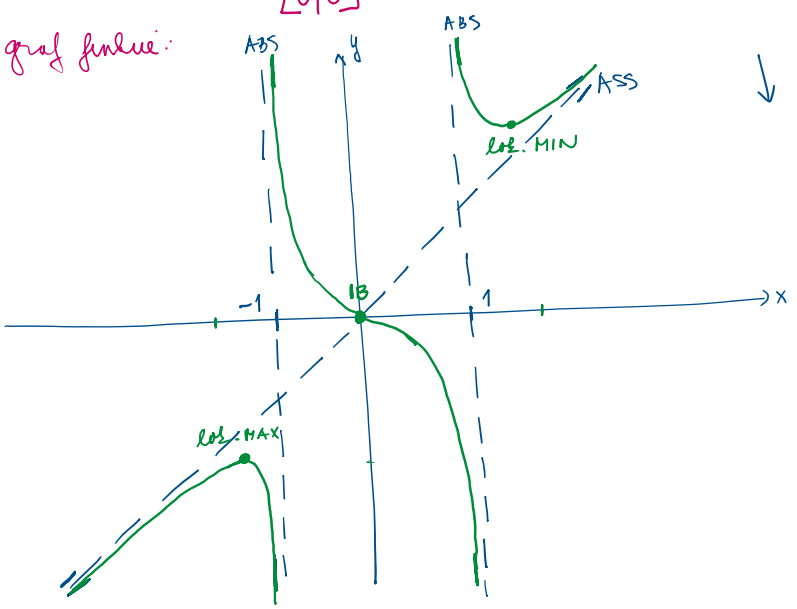
nulový bod f''

Tabuľka pre konvexnosť a konkávnosť + IB

$\mathcal{D}(f)$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	−	+	0	−	+
$f(x)$	∩	∪	IB	∩	∪

$[0,0]$

načrtneme graf funkcie:



↓ ďalšie celý príklad nebude na zápočte, iba časť (bez kreslenia)

TAYLOROV POLYNÓM ← využitie derivácie funkcie

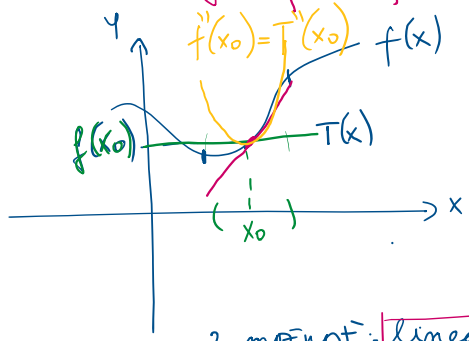
problém: nahradíme funkciu $f(x)$ („komplikovanú") „jednoduchšou" funkciou

↓ napr. - konštantná $y = k$
- lineárna $y = ax + b$
- kvadratická $y = ax^2 + bx + c$

nech $f(x)$ je definovaná na okolí bodu x_0 $O(x_0)$

a existujú $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$

$U(x_0)$ a existujú $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$



1. možnosť: nahradím konšt. funkciou

$y = f(x_0) = T(x)$

nech nová funkcia ("jednoduchšia") je označená ako $T(x)$

2. možnosť: lineárnu funkciu $T(x) = ax + b$ → aby smernica dotyč. priamky = smernica dotyčnice.

priamka = dotyčnica v bode $[x_0, f(x_0)]$

resp. $T'(x_0) = f'(x_0)$ → smernica dotyčnice

$T'(x_0)$ smernica priamky

$f(x)$

$y = ax^2 + bx + c$

hľadáme funkciu $T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ v tvare polynómu

tak aby čo najlepšie nahradila funkciu $f(x)$ na $O(x_0)$, teda

nech požiadavky

$$\begin{cases} T_n(x_0) = f(x_0) \\ T_n'(x_0) = f'(x_0) \\ T_n''(x_0) = f''(x_0) \\ \vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

počítajme derivácie:

$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$

$T_n'(x) = a_1 + a_2 \cdot 2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$

$T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$

$T_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x-x_0) + \dots$

$T_n''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$, teda $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(x_0)}{3!}$

$\vdots$

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

teda dostali sme funkciu:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorov polynóm funkcie $f(x)$ v bode x_0.

Môžeme písať $f(x) \approx T(x)$

zmysel: $f(x)$ nahradím polynómom.

príklad Nájdime Taylorov polynóm pre funkciu $f(x) = e^x$ v bode $x_0 = 0$.

počítame koeficienty

$f(x_0 = 0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$ $\quad f'(x_0 = 0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x$ $\quad f''(x_0 = 0) = e^0 = 1$

$f^{(n)}(x_0 = 0) = e^0 = 1$

$$T_n(x_0 = 0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= 1 + 1.(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(x - 0)^n =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \approx e^x$$

znak aproximácie