- nech $X = \mathbb{R}$ je pevne zvolené univerzum

Fuzzy interval a fuzzy číslo

Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(X)$ sa nazýva fuzzy intervalom ak spĺňa tri nasledujúce podmienky:

1. $\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} = \mu_A^{-1}((0,1\rangle)$ je ohraničená množina,
2. $R_A(\alpha) = \mu_A^{-1}(\langle\alpha, 1\rangle) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ je uzavretý interval pre všetky hladiny $\alpha \in (0,1\rangle$,
3. $R_A(1) \neq \emptyset$ (t. j. $R_A(1)$ je neprázdny uzavretý interval).

Fuzzy interval A sa nazýva fuzzy číslom ak je neprázdny uzavretý interval $R_A(1)$ jednobodovou množinou.

- pre fuzzy intervaly a fuzzy čísla sa používa spoločný pojem fuzzy kvantity

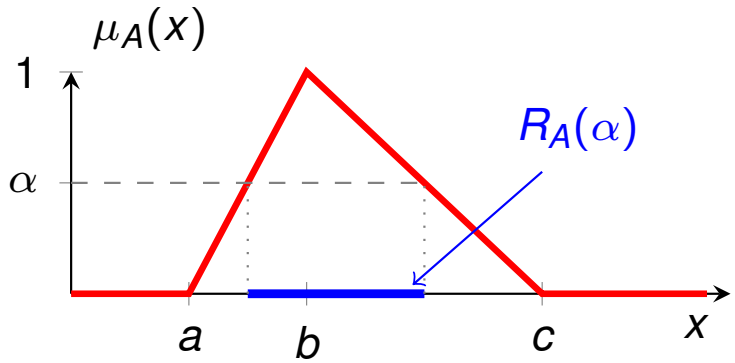
Trojuholníkové fuzzy číslo

Pre $a < b < c$ je trojuholníkové fuzzy číslo $A = (a, b, c)$ dané funkciou príslušnosti

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{pre } x \in \langle a,\ b\rangle, \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{pre } x \in (b, c\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

- pre jeho α-rezy platí $R_A(\alpha) = \langle a + \alpha(b-a),\ c - \alpha(c-b)\rangle$

- $\mathrm{Supp}(A) = (a, c)$
- $R_A(1) = \{b\}$



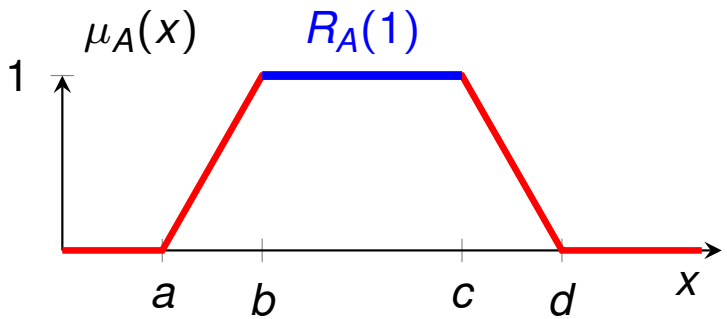
Lichobežníkový fuzzy interval

Pre $a < b \leq c < d$ je lichobežníkový fuzzy interval $A = (a, b, c, d)$ daný funkciou príslušnosti

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{pre } x \in \langle a,\ b\rangle, \\ 1 & \text{pre } x \in (b, c\rangle, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{pre } x \in (c, d\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

- pre jeho α-rezy platí $R_A(\alpha) = \langle a + \alpha(b-a),\ d - \alpha(d-c)\rangle$

- $\mathrm{Supp}(A) = (a, d)$
- $R_A(1) = \langle b,\ c\rangle$



Ostré číslo a ostrý interval

Ostré číslo $c \in \mathbb{R}$ a ostrý interval $\langle p, q\rangle$ chápeme ako fuzzy množiny s funkciami príslušnosti

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x = c, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \qquad \mu_{\langle p,\, q\rangle}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle p, q\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

- ostré číslo c je fuzzy číslo a pre všetky $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí $R_c(\alpha) = \{c\} = \langle c, c\rangle$

- ostrý interval $\langle p, q\rangle$ je fuzzy interval a pre všetky $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí $R_{\langle p,\, q\rangle}(\alpha) = \langle p, q\rangle$

- napr. čísla 0 a 1 vo vete o vlastnostiach operácií s fuzzy číslami sú ostré čísla

Veta (O vlastnosti fuzzy čísiel)

Ak A je fuzzy číslo a $\mu_A(x) = 1$*, tak* μ_A *je neklesajúca na* $(-\infty, x\rangle$ *a nerastúca na* $\langle x, \infty)$*.*

Fuzzy opačné číslo

Fuzzy interval (resp. číslo) opačný k fuzzy intervalu (resp. číslu) A je množina $-A$ definovaná vzťahom

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x).$$

- pre α-rezy fuzzy intervalov (resp. čísiel) a opačných fuzzy intervalov (resp. čísiel) platí:

$$R_{-A}(\alpha) = -R_A(\alpha)$$

- cieľom je rozšírenie binárnych operácií $+, -, \cdot, /$ z reálnych čísiel na fuzzy intervaly

Fuzzy množina získaná súčtom, rozdielom alebo násobením

Nech A, B sú fuzzy intervaly a $\square \in \{+, -, \cdot\}$. Potom $A \square B$ je fuzzy množina definovaná predpisom

$$\mu_{A\square B}(x) = \sup\left\{ \min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\} : y, z \in \mathbb{R},\ x = y \square z \right\}.$$

- ak uplatníme predošlú definíciu pre ostré intervaly, tak dostaneme tzv. intervalovú aritmetiku

Veta (Vlastnosť fuzzy intervalov (resp. čísiel))

Súčet, rozdiel a súčin fuzzy intervalov (resp. čísiel) je fuzzy interval (resp. číslo).

Intervalová aritmetika

Pre uzavreté intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ platí

- $\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$,
- $\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle = \langle a - d, b - c\rangle$,
- $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle \min P, \max P\rangle$ pre $P = \{ac, ad, bc, bd\}$, t. j. dolná hranica je najmenší a horná hranica najväčší zo štyroch súčinov krajných bodov,
- $\langle a, b\rangle / \langle c, d\rangle = \langle a, b\rangle \cdot \langle \frac{1}{d}, \frac{1}{c}\rangle$, ak $0 \notin \langle c, d\rangle$.

- pri rozdiele sa od ľavého konca odčítava pravý koniec a naopak

- napr. $\langle 1, 2\rangle - \langle 1, 2\rangle = \langle -1, 1\rangle \neq 0$ a $\langle -1, 2\rangle \cdot \langle 3, 4\rangle = \langle -4, 8\rangle$

Veta (Vlastnosť α-rezov na fuzzy intervaloch)

Pre ľubovoľné fuzzy intervaly A, B, hladinu $\alpha \in (0, 1\rangle$ a binárnu aritmetickú operáciu $\square \in \{+, -, \cdot\}$ platí

$$R_{A \square B}(\alpha) = R_A(\alpha) \square R_B(\alpha).$$

- delenie fuzzy intervalov resp. fuzzy čísiel sa zavádza osobitne, aby sme sa vyhli problémom s delením nulou

Fuzzy množina získaná podielom

Nech A, B sú fuzzy intervaly. Potom A/B je fuzzy množina definovaná predpisom

$$\mu_{A/B}(x) = \sup \left\{ \min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\} : y, z \in \mathbb{R},\ y = z \cdot x \right\}.$$

Veta (Výpočet podielu fuzzy intervalov)

Nech A, B sú fuzzy intervaly a $0 \notin \overline{\mathrm{Supp}(B)}$. Potom $1/B$ aj A/B sú fuzzy intervaly,

$$\mu_{1/B}(x) = \begin{cases} \mu_B\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \end{cases}$$

$A/B = A \cdot (1/B)$ a pre všetky hladiny $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí

$$R_{A/B}(\alpha) = R_A(\alpha) \,/\, R_B(\alpha).$$

- podmienka $0 \notin \overline{\mathrm{Supp}(B)}$ zaručuje, že pravá strana vzťahu $A/B = A \cdot (1/B)$ je fuzzy interval

- napr. pre $B = (1, 2, 4)$ je $R_{1/B}(\alpha) = \langle \frac{1}{4-2\alpha}, \frac{1}{1+\alpha} \rangle$

Veta (Vlastnosti operácií s fuzzy číslami)

Pre fuzzy čísla A, B, C platí

$$0 + A = A, \qquad 0 \cdot A = 0, \qquad 1 \cdot A = A, \qquad -(-A) = A,$$
$$A + B = B + A, \qquad A \cdot B = B \cdot A,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$
$$A + (-B) = A - B, \qquad (-A) \cdot B = -(A \cdot B) = A \cdot (-B),$$
$$A/B = A \cdot (1/B) \qquad \textit{ak je pravá strana fuzzy interval},$$
$$A \cdot (B + C) \leq (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

- pre fuzzy čísla nemusia platiť nasledujúce vzťahy

$$A - A = 0, \ (A + B) - B = A, \ A/A = 1,$$
$$(A/B) \cdot B = A, \ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Usporiadanie fuzzy množín

Pre fuzzy množiny $A, B \in \mathcal{F}(X)$ píšeme $A \leq B$, ak

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{pre všetky } x \in X.$$

- pre fuzzy intervaly A, B platí $A \leq B$ práve vtedy, keď

$$R_A(\alpha) \subseteq R_B(\alpha) \quad \text{pre všetky } \alpha \in (0, 1\rangle$$

- subdistributivita $A \cdot (B + C) \leq (A \cdot B) + (A \cdot C)$ teda znamená, že každý α-rez ľavej strany je obsiahnutý v α-reze pravej strany

Príklad

Pre $A = (1, 2, 3)$ je $R_A(\alpha) = \langle 1 + \alpha,\ 3 - \alpha \rangle$, teda

$$R_{A-A}(\alpha) = \langle (1+\alpha)-(3-\alpha),\ (3-\alpha)-(1+\alpha) \rangle = \langle -2+2\alpha,\ 2-2\alpha \rangle$$

a $A - A = (-2, 0, 2) \neq 0$.

- každý výskyt A sa vyhodnocuje nezávisle, preto sa neurčitosť pri odčítaní sčíta namiesto toho, aby sa vyrušila

