Fuzzy intervaly a fuzzy čísla

Označenie a použité vlastnosti:

- **Trojuholníkové fuzzy číslo** $A = (a, b, c)$, kde $a < b < c$, má funkciu príslušnosti

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pre } x \in \langle a, b\rangle, \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{pre } x \in (b, c\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \qquad R_A(\alpha) = \langle a + \alpha(b-a),\ c - \alpha(c-b)\rangle\,.$$

  Funkcia lineárne stúpa z a do b, lineárne klesá z b do c a jadro je $R_A(1) = \{b\}$.

- **Lichobežníkový fuzzy interval** $A = (a, b, c, d)$, kde $a < b \leq c < d$, lineárne stúpa z a do b, na $\langle b,\ c\rangle$ má hodnotu 1 a lineárne klesá z c do d. Jeho α-rezy sú

$$R_A(\alpha) = \langle a + \alpha(b-a),\ d - \alpha(d-c)\rangle\,, \qquad R_A(1) = \langle b,\ c\rangle\,.$$

- **Ostré číslo** c a **ostrý interval** $\langle p,\ q\rangle$ chápeme ako fuzzy množiny s funkciou príslušnosti 1 na danom čísle, resp. intervale, a 0 inak. Ich α-rezy sú $R_c(\alpha) = \{c\}$, resp. $\langle p,\ q\rangle$ pre všetky α.
- **α-rez** zapisujeme ako $R_A(\alpha) = \langle a_\alpha^L,\ a_\alpha^R\rangle$, kde a_α^L je ľavý a a_α^R pravý koniec, a $\alpha \in (0, 1\rangle$.
- **Hladinu $\alpha = 0$ nepoužívame**, lebo podľa definície je $R_A(0) = \{x : \mu_A(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$.
- **Uzáver nosiča** $\overline{\mathrm{Supp}}(A)$ dostaneme ako limitu krajných bodov α-rezov pre $\alpha \to 0^+$. V tabuľkách ho uvádzame v riadku $\alpha \to 0^+$.

Zadania úloh

Príklad 1: Overenie definície

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ sú dané fuzzy množiny

a) $\mu_A(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pre } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in (2, 3\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

b) $\mu_B(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pre } x \in \langle 1, 2), \\ 1 & \text{pre } x \in \langle 2, 4\rangle, \\ 5-x & \text{pre } x \in (4, 5\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

c) $\mu_C(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{pre } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ 1-|x-3| & \text{pre } x \in \langle 2, 4\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

d) $\mu_D(x) = \begin{cases} 0.8\,(1-|x|) & \text{pre } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

e) $\mu_E(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Rozhodnite, či ide o fuzzy interval, resp. fuzzy číslo.

Príklad 2: Overenie definície II

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ sú dané fuzzy množiny

a) $\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{pre } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \dfrac{3-x}{2} & \text{pre } x \in (1, 3\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

b) $\mu_B(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1 & \text{pre } x \in (1, 2\rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in (2, 3\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

c) $\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x = 0, \\ 0.5 & \text{pre } x \in (0, 1\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$

d) $\mu_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 1, 2), \\ 0.5 & \text{pre } x \in \langle 2, 3\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$

Nájdite ich α-rezy a rozhodnite, či ide o fuzzy interval, resp. fuzzy číslo.

Príklad 3: Z horizontálnej reprezentácie na funkciu príslušnosti

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ sú dané horizontálne reprezentácie množín A a B predpismi

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle 1+\alpha^2,\ 4-2\alpha\rangle & \text{pre } \alpha \in (0, 1\rangle, \end{cases} \qquad R_B(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle 2\alpha,\ 5-\alpha\rangle & \text{pre } \alpha \in (0, 1\rangle. \end{cases}$$

Nájdite ich vertikálne reprezentácie (funkcie príslušnosti), nosiče a jadrá. Rozhodnite, či ide o fuzzy interval, resp. fuzzy číslo. Určte $\mu_A(1.25)$ a $\mu_A(3)$.

Príklad 4: α-rezy a opačné číslo

Je daný lichobežníkový fuzzy interval $A = (1, 3, 4, 7)$.

a) Určte $R_A(\alpha)$, $\mathrm{Supp}(A)$ a $R_A(1)$.

b) Určte $-A$ a $R_{-A}(\alpha)$.

c) Dokážte všeobecne, že $R_{-A}(\alpha) = -R_A(\alpha)$.

Príklad 5: Súčet a rozdiel

Nech $A = (2,3,5)$ a $B = (1,2,4)$. Vypočítajte $A + B$, $A - B$ a $B - A$. Určte $\mu_{A+B}(4)$ a $\mu_{A+B}(7)$.

Príklad 6: Súčet a rozdiel lichobežníka a trojuholníka

Nech $A = (1,2,3,5)$ a $B = (-1,0,2)$. Vypočítajte $A + B$ a $A - B$. Určte $\mu_{A+B}(1)$ a $\mu_{A-B}(5)$.

Príklad 7: Ostrý interval + fuzzy číslo

Nech $A = \langle 1,\ 2\rangle$ je ostrý interval a $B = (0,1,3)$. Určte $A + B$.

Príklad 8: Súčet s nelineárnou funkciou príslušnosti

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pre } x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2 - x & \text{pre } x \in (1,2\rangle, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a trojuholníkové fuzzy číslo $B = (1,2,3)$. Určte $R_{A+B}(\alpha)$, funkciu príslušnosti μ_{A+B} a hodnoty $\mu_{A+B}(2)$, $\mu_{A+B}(4)$.

Príklad 9: Súčin kladných fuzzy čísel

Nech $A = (1,2,4)$ a $B = (2,3,4)$. Určte $R_{A\cdot B}(\alpha)$ aj funkciu príslušnosti $\mu_{A\cdot B}$. Je $A \cdot B$ trojuholníkové?

Príklad 10: Súčin, keď α-rez obsahuje záporné hodnoty

Nech $A = (-1,1,2)$ a $B = (2,3,4)$. Určte $R_{A\cdot B}(\alpha)$.

Príklad 11: Súčin záporného a kladného fuzzy čísla

Nech $A = (-3,-2,-1)$ a $B = (1,2,4)$. Určte $R_{A\cdot B}(\alpha)$ dvoma spôsobmi: priamo a pomocou vzťahu $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$.

Príklad 12: Ostré číslo a fuzzy číslo

Nech $c = -2$ je ostré číslo a $A = (1,3,4)$. Určte $c \cdot A$, $c + A$, $A + A$, $2 \cdot A$ a $A - A$. Porovnajte $A + A$ s $2 \cdot A$ a $A - A$ s $0 \cdot A$.

Príklad 13: Delenie

Nech $A = (2, 4, 6)$ a $B = (1, 2, 4)$.

a) Vypočítajte $R_{1/B}(\alpha)$ a $R_{A/B}(\alpha)$.

b) Prečo by nebolo rozumné deliť číslom $C = (-1, 1, 2)$?

Príklad 14: Delenie záporným fuzzy číslom

Nech $A = (2, 4, 6)$ a $B = (-4, -2, -1)$. Určte $R_{1/B}(\alpha)$ a $R_{A/B}(\alpha)$. Vypočítajte $\mu_{A/B}(-3)$ a $\mu_{A/B}(-1)$.

Príklad 15: Vzťahy, ktoré pre fuzzy čísla neplatia

Na konkrétnych fuzzy číslach ukážte, že nemusí platiť $A - A = 0$, $(A + B) - B = A$, $A/A = 1$, $(A/B) \cdot B = A$ ani $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.