

Matematika 3 – 3.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1 – str. 15 / 36: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$$

$$-\frac{2}{5}$$

Pri riešení si pomôžte riešeným príkladom zo zbierky na **str. 14 / Príklad 1.6**

1. NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY (NČR)

1.3 Kritéria konvergence radu

D'Alembertovo podielové kritérium (DPK)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad a nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $a_n \neq 0$.

Ak

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, tak je rad **absolútne konvergentný**.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, tak je rad **divergentný**.

Použitie: ak sa v NČR nachádza faktoriál, výraz na n – tú

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-1} \left(\frac{7}{5} \right)^n$$

Veta: Ak je NČR $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolútne konvergentný**, tak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergentný**.

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad.

Ak

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tak je rad **absolútne konvergentný**.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, tak je rad **divergentný**.

Použitie: ak sa v NČR nachádza výraz celý umocnený na n – tú.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{2n-1}$$

Úprava pomocou vzťahu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n} \right)^n = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad.

Ak

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tak je rad **absolútne konvergentný**.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, tak je rad **divergentný**.

Použitie: ak sa v NČR nachádza výraz celý umocnený na n – tú.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{2n-1}$$

Úprava pomocou vzťahu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n} \right)^n = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Pr. 2 – str. 18 / 81: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2}{e}, \text{ konverguje}$$

Pr. 3 – str. 18 / 68: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n (n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty, \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n (n+1)} \text{ použijeme D'Alambertovo kritérium, budeme riešiť limitu } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Pri vytváraní a_{n+1} člena dosadíme do predpisu rádu za všetky výrazy s n nové $n+1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+1+1)}}{\frac{n!}{3^n(n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}}{\frac{n!}{3^n(n+1)}} \right| =$$

dalej už absolútnu hodnotu nepíšeme, lebo pre $n = 1$ budú všetky členy kladné

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! 3^n (n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot (n+2) n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{3 \cdot (n+2)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1} = \frac{1}{3} \cdot \infty = \infty > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \rightarrow \text{NČR diverguje}$$

Pr. 4 – str. 17 / 54: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0, \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{použijeme D'Alambertovo kritérium}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1+2)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{3}{4}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (n+2)!}{\left(\frac{3}{4}\right)^n (n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right) (n+2)!}{\left(\frac{3}{4}\right)^n (n+3)(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{(n+3)} =$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+3)} = \frac{1}{3} \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \rightarrow \text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ konverguje}$$

Pr. 5 – str. 18 / 70: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{n^2 - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty, \text{ diverguje}$$

Pr. 6 – str. 21/ 101: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{n}{2}+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2, \text{ diverguje}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{n}{2}+3}$ použijeme Cauchyho odmocninové kritérium, riešime limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{n}{2}+3} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{\frac{n}{2}+3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{n}}$$

d'alej už absolútnu hodnotu
nepíšeme, lebo pre $n = 1$ budú
všetky členy kladné

$$\uparrow$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{8n}{2n}}{\frac{2n}{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{8n}{2n}}{\frac{2n}{2n}} \right)^{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{2} \right)^{\frac{3}{n}} = (4)^{\frac{1}{2}} (4)^{\frac{3}{\infty}}$$

$$= (4)^{\frac{1}{2}} (4)^{\frac{3}{\infty}} = \sqrt{4} (4)^0 = 2 > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \rightarrow \text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+2}{2n-1} \right)^{\frac{n}{2}+3} \text{ diverguje}$$

Pr. 7 – str. 21/ 109: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e}, \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{použijeme Cauchyho odmocninové kritérium}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \rightarrow \text{rad konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n = e^{\pm 1}$$

Pr. 8 – str. 21 / 110: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n-2} \right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^7, \text{ diverguje}$$

Pri riešení si pomôžte riešeným príkladom zo zbierky na **str. 20 / Príklad 1.11**

Pr. 9 – str. 20 / 97: Vyriešte konvergenciu rádu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n-2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{4}, \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n-2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{3n-2}{4n-2} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{4n-2} \right)^{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{4n-2} \right) = \frac{3}{4} < 1$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \rightarrow \text{rad konverguje}$$

Dú: str. 15 / 38, 41,47, str. 17 / 55, 62,67, 75, 86, str. 23 /125, 128, 130, 135