

ČÍSELNÉ RADY II.

$$\sum a_n \quad \text{PČS} \quad s_n \quad \text{K/D}$$

$$\text{I} \quad \lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \notin \mathbb{D} \quad \leftarrow$$

$$\text{Ak } \underline{a_n} > 0; \quad s_n = s_{n-1} + a_n > s_{n-1}$$

$$\underline{s_n} \uparrow \begin{cases} \text{zh. okr. } \sum a_n \notin \mathbb{K} \\ \uparrow \infty \quad \sum a_n = \infty \notin \mathbb{D} \end{cases}$$

Ak uvažujeme

$$\underline{a_1} + \underline{a_2} + \underline{a_3} + \dots$$

Výsledkomie prír. k-členov nemôže byť v $\mathbb{K}$ / $\mathbb{D}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{okr. buď } \mathbb{K} \text{ alebo } \mathbb{D}$$

$$\text{Ak } \sum a_n, \sum b_n \text{ sú } \mathbb{K}, \text{ tak aj rady } \sum \alpha a_n \text{ je } \mathbb{K}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \text{ je } \mathbb{K}$$

$$\text{Pre súčty platí } \sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n$$

$$\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$$

ABSOLÚTNA & RELATÍVNA KONVER

Máme

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

urob

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

$$a_n \leq |a_n|$$

Ak $\sum a_n$ sú $\mathbb{K}$, tak pre súčet platí

$$\sum a_n \leq \sum |a_n|$$

Veta: Ak $\sum |a_n| \notin \mathbb{K}$, tak aj $\sum a_n \notin \mathbb{K}$

Možnosti pre $\mathbb{K}$ / $\mathbb{D}$

$$\sum a_n$$

$$\sum |a_n|$$

$$\mathbb{K}$$

$$\mathbb{K}$$

$\rightarrow$ Absolútna konv.

$$\mathbb{K}$$

$$\mathbb{D}$$

$\rightarrow$ Relatívna konv.

$$\mathbb{D}$$

$$\mathbb{D}$$

D D

ČR $\sum a_n$ je abs. konv. (AK) a $\sum |a_n|$ (a teda aj $\sum a_n$) je konv.
 $\sum a_n$ je rel. konv. (RK) a $\sum a_n$ je k & $\sum |a_n|$ je D

Až $a_n > 0 \quad \sum a_n = \sum |a_n| \quad AK = K$

ALTERNUJÚCE RADY (RADY SO STRIEDAVÝMI ZNAKMI)

$a_n > 0 \quad \forall n$

ČR $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

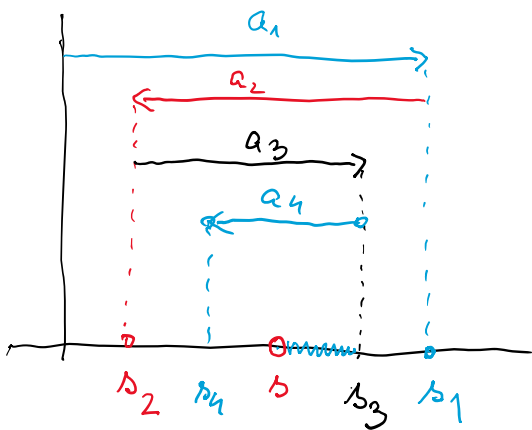
Viemo, že nutné podm. pre k $\sum a_n$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Predpokladajme, že $a_n \downarrow 0$ (klesajúca, konverg. k 0)

$a_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$

? $\sum (-1)^{n+1} a_n$ je k ?

o k/D rozhoduje s_n



$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 - a_2$

$s_3 = s_2 + a_3$

$s_4 = s_3 - a_4$

$s_{2n+1} \downarrow \quad s_{2n} \downarrow \quad \lim a_n = 0$

$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s$

Veta (KRIT pre alt. rady)

nech $a_n \downarrow 0$, potom $\sum (-1)^n a_n$ je k

Máme info aj o súde

$|s_3 - s| < a_4$

no môžeme $|s_n - s| < a_{n+1}$
čo do aproximácie

$a_1 - a_2 + a_3 - \underbrace{(a_4)}_{a_4} + a_5 -$

$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} -$
 $|s_4 - s| < \frac{1}{25}$

$s \approx s_3$, takže chyba $< a_4$

$\frac{1}{n^2} \downarrow 0$

$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
k

Výběžná AK/RK $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rightarrow$ ALT.

$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0$ je k

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je D (POUŽILI SME 1. KRIT.)

DANÝ RAD JE REL. KONV.

Pr. Výř. AK/RK $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow$ je AB. k

zobor

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow$ je k (dobroca sme možliť)

MAJORAČNÉ KRITÉRIUM

Nech $\sum a_n, \sum b_n$ sú rady s kladnými členmi

$0 < \underline{a_n} \leq \underline{b_n}$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$

I. Ak $\sum b_n$ je k, tak aj $\sum a_n$ je k

$\underline{a_n} \leq \underline{b_n}^* \rightarrow$ je zle obr.

II. Ak $\sum a_n$ je D, tak aj $\sum b_n$ je D (súčet = ∞)

KRITÉRIA NA ABSOLÚTNU KONV

(dajú sa použiť aj na rady s kladnými členmi)

1. Veta (ODMOCNINOVÉ) CAUCHY

Máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nech existuje (konštantná alebo nekonečná)

$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Polom

... 1 0 5 0 ... 1 0 5 0 ...

Polom

$n \rightarrow \infty$

1. ak $\lambda < 1$, tak $\sum a_n$ je AK (d.j. $\sum |a_n|$ je k)

2. ak $\lambda > 1$, tak $\sum a_n$ je D

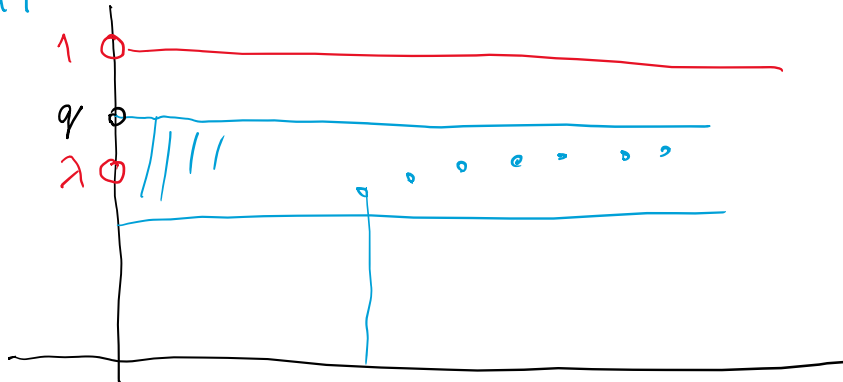
3. ak $\lambda = 1$, tak ? (nerieme týmto krit rozhodni!)

ka chvilu

Zdôvodnenie

$$b_n = \sqrt[n]{|a_n|} \quad b_n \rightarrow \lambda < 1$$

ad 1 x^1



Korokaj ε -pás okolo λ ,
ktorý cel' leží pod 1
horná hranica je označ.
 $q < 1$

$\lim b_n = \lambda$ d.j. od istého indexu všetky b_n ležia v ε -páse

$$b_n < q \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < q$$

~

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

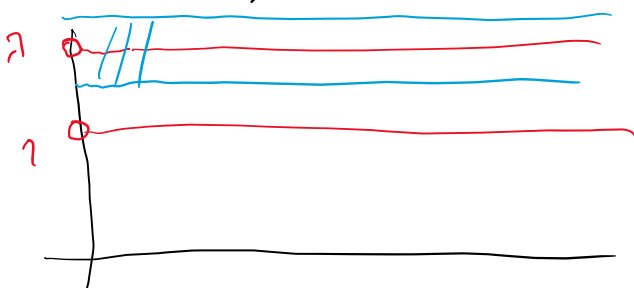
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$$|a_n| < q^n \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n < \infty$$

MAJDRANTNE

Geom. rad a
je k lebo $q < 1$

ad 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda > 1$

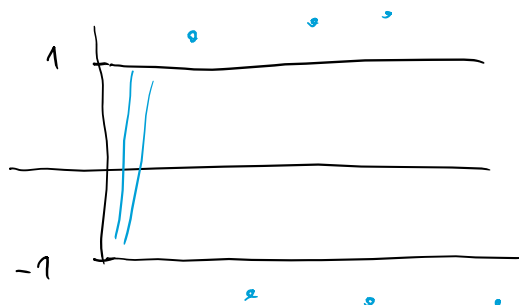


ε -pás okolo λ , ktorý
cel' leží nad 1

tedz všetky b_n ležia v ε -páse

$$b_n > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

$$|a_n| > 1$$



memo-

$$\lim a_n \neq 0$$

$\Downarrow$

$$\sum a_n \text{ je D}$$

↓ $\sum a_n$ je D



Kedy použiť odnosc. kritic. (odnosc a_n a a_{n+1} vidím mocnisku)

Pc Učtebník k/D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^n$$

Red 1 sl. členmi

$$AK = k$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

AK (k)

2. Veta (podielove)

Máme $\sum a_n$. Nech existuje (oblasť alebo neobmedzená)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Polom

1. Ak $\rho < 1$, tak $\sum a_n$ je AK

(d. j. $\sum |a_n|$ je k)

2. Ak $\rho > 1$, tak $\sum a_n$ je D

3. Ak $\rho = 1$, tak ?

ad 1. $b_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$\lim b_n = \rho < 1$$

Kolko e-okolie (male) ρ , takísa celí ležia pod 1. Horná hranica

$$\rho < 1$$

$$b_n < \rho$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho$$

$$|a_{n+1}| < \rho |a_n| < \rho \rho |a_{n-1}| < \dots < \rho^n |a_1|$$

malý

$$\sum |a_n|$$

malý

$$\sum |a_n| \rho^n$$

geom. postupnosť ($\rho < 1$) je majorovaná $\sum |a_n|$

$\sum |a_n|$
je k

$\sum |a_n| q^n$

je majorovány $\sum |a_n|$

MAJOR.

2. kedp pousit toto krit?

2. az vidim Sazloze?
n!

Př. Vyj. 2. směr: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

rod 1. čl. d. j. $A_k = k$

n! nepřijemný při výpočtu limit
pod. řad ho přeš!

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

AK

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Poznamky k odn.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\sqrt{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5},$$