

KOMPLEXNÉ ČÍSLA - KČ

MNOŽINU KČ OZNAČUJEME $\mathbb{C}$. JEJ PRVKY OZNAČUJEME z ; $z \in \mathbb{C}$. ^{PATRÍ}

PLATÍ - VZŤAH MEDZI MNOŽINOU REÁLNYCH A KOMPLEXNÝCH ČÍSEL : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ^{PODMNOŽINA}

KAŽDÉ KČ z VIEME VYJADRIŤ V TVARE $z = x + i \cdot y$, KDE

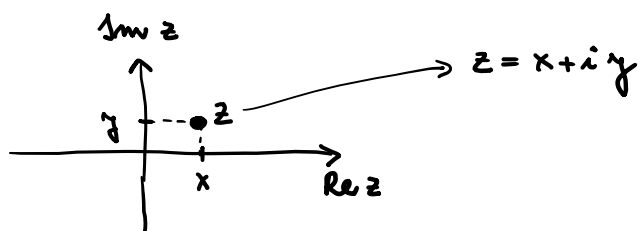
- i JE IMAGINÁRNA JEDNOTKA VYHOVUJÚCA PODMIENKE $(i)^2 = -1$
- x JE REÁLNA ZLOŽKA KČ ; $x \in \mathbb{R}$; $x = \operatorname{Re} z$
- y JE IMAGINÁRNA ZLOŽKA KČ ; $y \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{Im} z$

TENTO TVAR KČ NAZÝVAME ALGEBRAICKÝ TVAR KČ z .

PRÍKLAD : KČ $z = -\frac{2}{3} + 7i$ ZAPÍSANÉ V ALG. TVARE MÁ

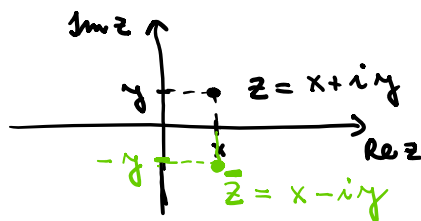
- REÁLNU ZLOŽKU $x = -\frac{2}{3}$
- IMAGINÁRNU ZLOŽKU $y = 7$

KČ VIEME ZNÁZORNŮVAŤ V GAUSSOVEJ ROVINE



KČ V TVARE $\bar{z} = x - i \cdot y$ SA NAZÝVA KOMPLEXNE ZDRUŽENÉ K ČÍSLU $z = x + i \cdot y$
(REÁLNA ZLOŽKA OSTÁVA ZACHOVANÁ, IMAGINÁRNA SA MENÍ NA OPACNÚ)

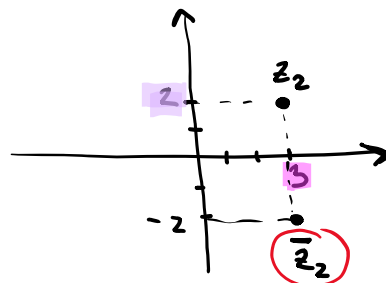
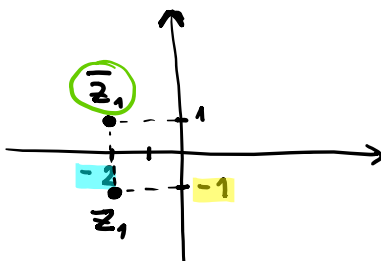
V GAUSSOVEJ ROVINE SÚ DVE NAVZÁJOM KOMPLEXNE ZDRUŽENÉ ČÍSLA GRAFICKY OSOVO SÚMERNÉ PODĽA REÁLNEJ OSI



PRÍKLAD : KU KAŽDÉMU ZADANÉMU KČ z NÁJDI ME $\bar{z}$ A ZNÁZORNÍ ME ICH V GAUSSOVEJ ROVINE

$$z_1 = -2 - i \Rightarrow \bar{z}_1 = -2 + i$$

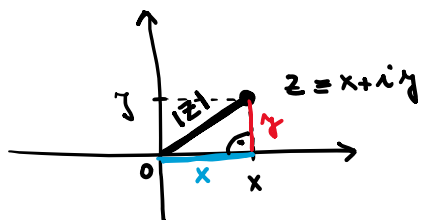
$$z_2 = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z}_2 = 3 - 2i$$



ABSOLÚTNÁ MODNOTA (MODUL) KČ $z = x + i \cdot y$ JE NEZÁPORNÉ ČÍSLO DANE

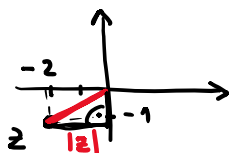
VZŤAHOV

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



V GAUSSOVEJ ROVINE JE MODUL KČ VEDIALENOSŤ ČÍSLA z OD ZAČIATKU SÚRADNICOVEJ SÚSTAVY

PRÍKLAD: URČME MODUL KČ $z = -2 - i$



$$x = -2 \quad y = -1 \Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

OPERÁCIE S KČ V ALGEBRAICKOM TVARE

SÚČET A ROZDIEL KČ

- ROBIEME PO ZLOŽKÁCH, T.J. SČÍTAME (ODČÍTAME) REÁLNE ZLOŽKY A SČÍTAME (ODČÍTAME) IMAGINÁRNE ZLOŽKY

$$\text{NECH } z_1 = x_1 + i \cdot y_1$$

$$z_2 = x_2 + i \cdot y_2$$

$$\text{SÚČET } z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2)$$

$$\text{ROZDIEL } z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 + i \cdot y_1 - x_2 - i \cdot y_2 = (x_1 - x_2) + i (y_1 - y_2)$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME $z_1 + z_2$ A $z_2 - z_1$, AK $z_1 = -\frac{3}{4} - \frac{2}{3}i$

$$z_2 = -1 + \frac{1}{6}i$$

$$z_1 + z_2 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}i\right) + \left(-1 + \frac{1}{6}i\right) = \left(-\frac{3}{4} - 1\right) + i\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{7}{4} + i\left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{7}{4} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 - z_1 = \left(-1 + \frac{1}{6}i\right) - \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}i\right) = -1 + \frac{1}{6}i + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}i = \left(-1 + \frac{3}{4}\right) + i\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$$

k -NÁSOBOK KČ ; $k \in \mathbb{R}$

- ROBIEME TAK, ŽE KAŽDÚ ZLOŽKU KČ VYNÁSOBIEME KONŠTANTOU k

$$\text{NECH } z = x + i \cdot y$$

$$k\text{-NÁSOBOK } k \cdot z = k \cdot x + i \cdot k \cdot y$$

PRÍKLAD: KU KČ $z = 2 + 3i$ NÁJDEME JEHO 5-NÁSOBOK

$$5 \cdot z = 5(2 + 3i) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3i = 10 + 15i$$

SÚČIN KČ

- ROZÍME AKO NÁSOBENIE DVOČLENOV - KAŽDÁ ZLOŽKA JEJEDNÉHO KČ SA VYNÁSOBÍ S KAŽDOU ZLOŽKOU DRUHÉHO KČ, VYUŽÍVAME PRI TOM, ŽE $(i)^2 = -1$

$$\text{NECH } z_1 = x_1 + i y_1 \\ z_2 = x_2 + i y_2$$

$$\begin{aligned} \text{SÚČIN } z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + (i)^2 y_1 \cdot y_2 = \\ &= \underline{x_1 x_2} + \underline{x_1 y_2 i} + \underline{y_1 x_2 i} - \underline{y_1 y_2} = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME $z_1 \cdot z_2$, AK $z_1 = -1 + i$
 $z_2 = 2 + 3i$

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + i) \cdot (2 + 3i) = -2 - 3i + 2i + 3(i)^2 = -2 - i - 3 = \underline{\underline{-5 - i}}$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 9 + 6i - 6i - 4(i)^2 = 9 + 4 = 13$

POZNÁMKA: SÚČIN $z \cdot \bar{z} = (x + i y) \cdot (x - i y) = x^2 + y^2$

PODIEL KČ

- ROZÍME TAK, ŽE PODIEL ZAPÍSANÝ V TVARE ZLOMKU VYNÁSOBÍME ZLOMKOM V TVARE „VMOJNEJ JEDNOTKY“ TAK, ABY SME VO VÝSLEDNOM MENOVATELI ODSTRÁNILI KOMPLEXNÉ ČÍSLO

- VYUŽÍJEME PRI TOM FAKT, ŽE $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

$$\text{NECH } z_1 = x_1 + i y_1 \\ z_2 = x_2 + i y_2$$

$$\begin{aligned} \text{PODIEL } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} \cdot \frac{x_2 - i y_2}{x_2 - i y_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i (y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x^2 + y^2} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x^2 + y^2} \right)$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME $\frac{z_2}{z_1}$; $\frac{z_1}{z_2}$, AK $z_1 = 1 - 2i$
 $z_2 = 3i = 0 + 3i$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3i(1+2i)}{1+4} = \frac{3i-6}{5} = \frac{-6+3i}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} = \frac{(1-2i)(-3i)}{9} = \frac{-3i-6}{9} = \frac{-6-3i}{9} = -\frac{6}{9} - \frac{3}{9}i = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$$

UMOCŇOVANIE KC

- MÁ ZMYSEL (V ALGEBRAICKOM TVARE) IBA PRI NÍZKÝCH MOCNINÁCH (z^2 , z^3)
- VYUŽÍVAME PRI TOM EŇAĽE VZORCE ALEBO POSTUPNÉ NÁROBENIE KC

VZORCE :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

PLATÍ :

$$\begin{aligned} (i)^1 &= i \\ (i)^2 &= -1 \\ (i)^3 &= (i)^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ (i)^4 &= [(i)^2]^2 = (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i)^5 &= (i)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ (i)^6 &= (i)^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

PRÍKLAD: $(i)^{173} = (i)^{172} \cdot (i)^1 = (i^2)^{86} \cdot i = (-1)^{86} \cdot i = 1 \cdot i = i$ → PÁRNE

$(i)^{170} = (i^2)^{85} = (-1)^{85} = -1$ → NEPÁRNE

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME z^2 ; z^3 ; AK $z = -1 + 2i$

CEZ VZORCE: $z^2 = (-1+2i)^2 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot (2i) + (2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

POSTUPNÝM NÁROBENÍM: $z^2 = (-1+2i)^2 = (-1+2i)(-1+2i) = 1 - 2i - 2i - 4 = -3 - 4i$

CEZ VZORCE: $z^3 = (-1+2i)^3 = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2i + 3 \cdot (-1) \cdot (2i)^2 + (2i)^3 =$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$= -1 + 6i - 3 \cdot (-4) + 8i^3 = -1 + 6i + 12 - 8i = \underline{\underline{11 - 2i}}$$

POSTUPNÝM NÁSOBENÍM: $z^3 = (-1+2i)^3 = (-1+2i)(-1+2i)(-1+2i) = (-1+2i)^2(-1+2i) =$
 $= (-3-4i)(-1+2i) = 3 - 6i + 4i + 8 = \underline{\underline{11 - 2i}}$