

Kapitola 2

GRAFY A DIGRAFY

2.1 Základné definície

Definícia 2.1 Grafom G nazveme usporiadanú dvojicu $G = (V, H)$, kde V je neprázdna, konečná množina a H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazývame vrcholy a prvky množiny H hrany (zapisujeme uv) grafu G . Označujeme $n = |V(G)|$ a $m = |H(G)|$.

Definícia 2.2 Digrafom $\vec{G}$ nazveme usporiadanú dvojicu $\vec{G} = (V, H)$, kde V je neprázdna, konečná množina a H je množina usporiadaných dvojíc typu (u, v) , kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazývame vrcholy a prvky množiny H orientované hrany (zapisujeme $\vec{uv}$) digrafu $\vec{G}$. Označujeme $n = |V(\vec{G})|$ a $m = |H(\vec{G})|$.

Majme graf $G = (V, H)$, resp. digraf $\vec{G} = (V, H)$. Množinu V nazývame vrcholová množina grafu G , resp. digrafu $\vec{G}$ a množinu H zase hranová množina grafu G , resp. digrafu $\vec{G}$.

Graf a digraf sú najjednoduchšie grafové štruktúry, v ktorých nie sú dovolené hrany typu vv , nazývané tiež slučky. V grafe, resp. digrafe môže pre každú dvojicu $u, v \in V$ existovať najviac jedna hrana typu uv , resp. $\vec{uv}$. Poznamenajme, že v grafe je hrana uv totožná s hranou vu , kým v digrafe $\vec{uv}$ a $\vec{vu}$ sú to dve rôzne orientované hrany.

Graf často reprezentujeme graficky. Príslušný obrázok voláme diagram grafu.

Definícia 2.3 Diagram grafu $G = (V, H)$ v nejakom priestore P je množina bodov B a množina súvislých čiar S v priestore P takých, že:

- Každému vrcholu $v \in V$ zodpovedá práve jeden bod $b_v \in B$ a každému bodu $b \in B$ zodpovedá práve jeden vrchol $v \in V$, teda $(\forall u, v \in V) : u \neq v \Leftrightarrow b_u \neq b_v$.

- Každéj hrane $h \in H$ zodpovedá práve jedna čiara $s_h \in S$ a každej čiare $s \in S$ zodpovedá práve jedna hrana $h \in H$, teda: $(\forall g, h \in H) : g \neq h \Leftrightarrow s_g \neq s_h$.
- Ak $h = uv \in H$, potom čiara s_h má koncové body b_u, b_v . Okrem koncových bodov žiadna čiara neobsahuje žiaden bod typu $b_w \in B$, $w \neq u, v$.
- Často sa žiada, aby bol diagram nakreslený tak, že žiadna čiara samu seba nepretína a dve čiary majú najviac jeden priesečník.

Veľmi často sa za priestor P berie rovina. Skúmajú sa však aj diagramy grafov na guľovej ploche, anuloide, Möbiovej ploche či v trojrozmernom Euklidovskom priestore. Podobne ako diagram grafu možno definovať diagram digrafu, ak namiesto čiar použijeme orientované čiary, resp. šípky.

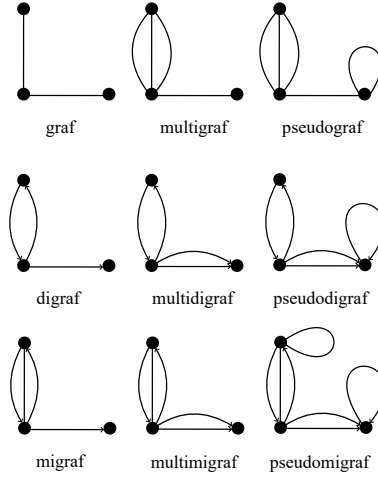
Definícia 2.4 Diagram grafu, resp. digrafu v rovine nazveme **rovinný**, ak sa jeho hrany nepretínajú nikde inde okrem vrcholov. Graf $G = (V, H)$, resp. digraf $\vec{G} = (V, H)$ nazveme **planárny**, ak k nemu existuje rovinný diagram.

V teórii grafov treba striktne rozlišovať medzi grafom a jeho diagramom. Graf je dvojica množín vrcholov a hrán, diagram grafu je „obrázok“, ktorý istým spôsobom korešponduje s príslušným grafom. Ak je daný diagram grafu, graf je určený jednoznačne. K jednému grafu však možno nakresliť ľubovoľné množstvo rôznych diagramov, o ktorých na prvý pohľad ani nemusí byť zrejmé, že sú diagramami toho istého grafu.

Teória grafov však študuje i zložitejšie útvary ako je graf a digraf. V týchto štruktúrach sú dovolené viacnásobné hrany (multihrany), slučky a dokonca i oba typy hrán naraz. Pre tieto štruktúry už definície grafu a digrafu nepostačujú, a preto sa používajú zložitejšie matematické modely. Jedna sa o štruktúry ako multigraf, pseudograf, migraf a iné.

Definícia 2.5 Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u, v \in V$, pričom $h = uv \in H$. Vrchol u nazývame **incidentný** s hranou, ak je jedným z koncových vrcholov hrany h . V tomto prípade hovoríme, že vrcholy u, v sú **susedné**.

Definícia 2.6 Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, $u, v \in V$ a $\vec{h} = \overrightarrow{uv} \in H$. Potom hovoríme, že orientovaná hrana $\vec{h}$ **vychádza z vrcholu** u (vrchol u je začiatočný vrchol orientovanej hrany h) a orientovaná hrana h **vchádza do vrcholu** v (vrchol v je koncový vrchol orientovanej hrany h). Orientovaná hrana h je **incidentná** s vrcholmi u, v .



Obr. 2.1: Diagramy rôznych zložitejších grafových štruktúr.

Budeme používať nasledujúce označenia:

- $H^+(v)$... množina všetkých hrán digrafu $\vec{G}$ vychádzajúcich z vrcholu v ,
- $H^-(v)$... množina všetkých hrán digrafu $\vec{G}$ vchádzajúcich do vrcholu v ,

$$H(v) = H^+(v) \cup H^-(v),$$

- $V^+(v)$... množina koncových vrcholov všetkých hrán z $H^+(v)$,
- $V^-(v)$... množina začiatoč. vrcholov všetkých hrán z $H^-(v)$,

$$V(v) = V^+(v) \cup V^-(v).$$

Definícia 2.7 Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u \in V$. Stupeň vrcholu u (ozn. $\deg_G(u)$) je počet hrán s ktorými je vrchol u incidentný.

Definícia 2.8 Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf a nech $u \in V$. Vonkajší (výstupný) stupeň vrcholu u (ozn. $\text{odeg}_G(u)$, resp. $\deg_+(u)$) je počet hrán vystupujúcich z vrcholu u . Analogický vnútorný (vstupný) stupeň vrcholu u (ozn. $\text{iddeg}_G(u)$, resp. $\deg_-(u)$) je počet hrán vstupujúcich do vrcholu u .

Definícia 2.9 Vrchol grafu $G(V, H)$, ktorý má stupeň 0, nazývame izolovaný vrchol. Vrchol digrafu $\vec{G} = (V, H)$ nazývame izolovaný, ak je jeho vstupný aj výstupný stupeň rovný 0.

Definícia 2.10 Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva grafy. Hovoríme, že graf G je izomorfný s grafom G^* ($G \cong G^*$) ak existuje také bijektívne zobrazenie $f : V \rightarrow V^*$, že $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow f(u)f(v) \in H^*$.

Jednou z možností, ako zistiť, či sú dva grafy s n vrcholmi izomorfné, je postupne preskúšať všetky bijekcie medzi ich vrcholovými množinami. Takýchto bijekcií môže byť až $n!$, preto tento postup nie je efektívny. Nie je však pravda, že každý algoritmus musí preskúšať všetkých $n!$ možností. Problém izomorfizmu grafov patrí do triedy NP.

Veta 2.1 (Prvá matematická veta-Euler) *Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom súčet stupňov všetkých vrcholov sa rovná dvojnásobku počtu hrán, t.j. $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|H|$.*

Dôsledky Eulerovej vety:

Dôsledok 2.2 *Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf. Potom $\sum_{v \in V} \text{ideg}_G(v) = \sum_{v \in V} \text{odeg}_G(v) = |H|$.*

Dôsledok 2.3 *Nech $G = (V, H)$ je graf s aspoň dvoma vrcholmi. Potom V obsahuje aspoň dva vrcholy rovnakého stupňa.*

Dôkaz. Nech $G = (V, H)$ a $|V| = n$. Stupeň každého vrcholu musí patriť do množiny $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Ak však graf obsahuje vrchol stupňa 0, nemôže zároveň obsahovať vrchol stupňa $n-1$. V jednom grafe teda môže existovať najviac $n-1$ rôznych stupňov vrcholov. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že v G existujú aspoň dva vrcholy rovnakého stupňa. $\square$

Dôsledok 2.4 *Počet vrcholov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe $G = (V, H)$ je párnny.*

2.1.1 Základne typy grafov

Nech $G = (V, H)$ je graf, potom G nazývame:

1. **triviálny**, ak pozostáva z jedného vrcholu ($V = \{u\}$).
2. **diskrétny**, ak $H = \emptyset$. Ak $|V| = n$, označujeme graf D_n .
3. **k -regulárny**, ak každý jeho vrchol je stupňa k . Ak $k = 3$, graf nazývame kubický.
4. **kompletný** graf na n vrchoch, ak $|V(G)| = n$ a $(\forall u, v \in V, u \neq v) : uv \in H$. Ozn. K_n
5. **bipartitný**, ak $V = V_1 \cup V_2$, pričom $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a $(\forall uv \in H) : u \in V_1$ a $v \in V_2$.

6. **kompletný bipartitný**, ak je bipartitný a navyše $(\forall u \in V_1)$ a $(\forall v \in V_2)$ existuje hrana $uv \in H$. Ak $|V_1| = n$ a $|V_2| = m$, označujeme graf $K_{n,m}$.

V niektorých zdrojoch sa v definícii grafu pripúšťa aj prázdna vrcholová množina $V = \emptyset$. Graf $G = (\emptyset, \emptyset)$ sa potom nazýva **prázdny graf**.

Definícia 2.11 Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva grafy. Hovoríme, že graf G je **komplement** grafu G^* , ak $V = V^*$ a $(\forall u, v \in V, u \neq v) : uv \in H \Leftrightarrow uv \notin H^*$.

Definícia 2.12 Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **autokomplementárny**, ak je izomorfny so svojim komplementom.

Definícia 2.13 Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$ a $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Postupnosť stupňov vrcholov $\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \deg_G(v_3), \dots, \deg_G(v_n)$ nazývame **grafová postupnosť** grafu G .

Veta 2.5 (Havel–Hakimi) Nerastúca postupnosť $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ nezáporných celých čísel pre $n \geq 2$, je grafová práve vtedy keď postupnosť $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n)$ je grafová.

Príklad 2.1 Máme 6 serverov v dátovom centre. Kvôli redundancii má byť každý server priamo prepojený s určitým počtom ďalších serverov. Požiadavky sú dané v tabuľke:

Server	Počet priamych spojení
S1	4
S2	4
S3	3
S4	2
S5	2
S6	1

Tabuľka 2.1: Požadovaný počet priamych spojení jednotlivých serverov.

Je možné navrhnuť fyzickú sieť tak, aby každý server mal práve požadovaný počet priamych spojení? Dátové centrum budeme modelovať neorientovaným grafom $G = (V, H)$. Každému serveru priradíme jeden vrchol grafu a každému priamemu obojsmernému spojeniu medzi dvoma servermi priradíme jednu hranu. Vrcholová množina je $V = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$. Stupeň vrcholu predstavuje počet serverov, s ktorými je príslušný server priamo spojený. Požiadavkám zo zadania preto zodpovedá nerastúca postupnosť $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$. Na overenie, či je táto postupnosť grafová, použijeme Havelovu-Hakimiho vetu.

Odstránime prvý člen 4 a od nasledujúcich štyroch členov odčítame číslo 1. Dostaneme

$$(4, 4, 3, 2, 2, 1) \longrightarrow (3, 2, 1, 1, 1).$$

Odstránime prvý člen 3 a od nasledujúcich troch členov odčítame číslo 1. Dostaneme postupnosť

$$(3, 2, 1, 1, 1) \longrightarrow (1, 0, 0, 1).$$

Po jej opätovnom usporiadaní do nerastúceho poradia dostaneme

$$(1, 1, 0, 0).$$

Odstránime prvý člen 1 a od nasledujúceho člena odčítame číslo 1:

$$(1, 1, 0, 0) \longrightarrow (0, 0, 0).$$

Dostali sme nulovú postupnosť. Podľa Havelovej-Hakimiho vety je teda pôvodná postupnosť $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$ grafová. Požadovanú fyzickú sieť preto možno vytvoriť.

Jedna z možností zapojenia vznikne priamo počas vykonávania Havelovho-Hakimiho algoritmu. Server S_1 , ktorý požaduje štyri spojenia, spojíme so servermi S_2, S_3, S_4 a S_5 . Serveru S_2 potom zostávajú tri požadované spojenia, preto ho spojíme so servermi S_3, S_4 a S_5 . Nakoniec spojíme server S_3 so serverom S_6 . Hranová množina výsledného grafu môže byť $H = \{S_1S_2, S_1S_3, S_1S_4, S_1S_5, S_2S_3, S_2S_4, S_2S_5, S_3S_6\}$.

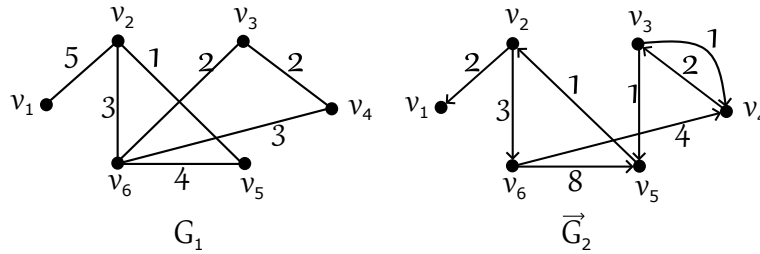
Nerastúca grafová postupnosť vznikne usporiadaním prvkov grafovej postupnosti neklesajúco. V ďalšom budeme pracovať len s neklesajúcimi grafovými postupnosťami a v krátkosti budeme slovíčko „neklesajúca“ vynechávať. Najmenšie číslo v grafovej postupnosti nazývame **minimálny stupeň grafu** (ozn. $\delta(G)$) a najväčšie číslo zase **maximálny stupeň grafu** (ozn. $\Delta(G)$).

Definícia 2.14 Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú grafy. Hovoríme, že graf G^* je **podgrafom** grafu G ($G^* \subseteq G$), ak $V^* \subseteq V$ a $H^* \subseteq \{uv \in H; u, v \in V^*\}$. Hovoríme, že graf G^* je **faktorový podgraf** grafu G ak platí: $V^* = V$ a $H^* \subseteq H$. Hovoríme, že graf G^* je **indukovaný podgraf** grafu G na množine V^* , ak G^* je maximálny podgraf grafu G s množinou vrcholov V^* .

Analogicky definujeme pojmy poddigraf, faktorový poddigraf a indukovaný poddigraf digrafu. Pri indukovanom poddigrafe ponecháme všetky orientované hrany pôvodného digrafu, ktorých oba koncové vrcholy patria do zvolenej množiny vrcholov.

Definícia 2.15 Graf $G = (V, H)$ (resp. $\vec{G} = (V, H)$) nazveme **hranovo ohodnoteným**, ak každej hrane (resp. orientovanej hrane) $h \in H$ je priradené reálne číslo $c(h)$ nazývané cena hrany h alebo tiež ohodnotenie hrany h . Za hranovo ohodnotený graf budeme teda pokladať usporiadanú trojicu $G = (V, H, c)$ ($\vec{G} = (V, H, c)$), kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $c : H \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine H .

Podobne možno definovať vrcholovo ohodnotený graf, resp. digraf ako usporiadanú trojicu $G = (V, H, d)$, resp. $\vec{G} = (V, H, d)$, kde V je množina vrcholov, H



Obr. 2.2: Diagramy hranovo ohodnoteného grafu a hranovo ohodnoteného digrafu.

množina hrán a $d : V \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine V . Číslo $d(v)$ nazveme ohodnotenie vrcholu v alebo tiež cena vrcholu v .

Graf, resp. digraf, ktorý je súčasne hranovo aj vrcholovo ohodnotený, môžeme reprezentovať usporiadanou štvoricou $G = (V, H, c, d)$, resp. $\vec{G} = (V, H, c, d)$, kde $c : H \rightarrow \mathbb{R}$ je ohodnotenie hrán a $d : V \rightarrow \mathbb{R}$ je ohodnotenie vrcholov.

Ohodnotenie – cena hrany môže predstavovať nejaký číselný parameter hrany – napr. dĺžku, kapacitu, nosnosť, útlm signálu. Podobne ohodnotenie vrcholu. Pri grafových modeloch reálnej dopravnej siete sa stretneme s grafmi, ktoré budú aj vrcholovo aj hranovo ohodnotené. Bežné sú aj príklady viacerých ohodnotení hrán, resp. vrcholov. Ak hrana modeluje cestný úsek, tento môže byť charakterizovaný svojou dĺžkou, šírkou, polomerom zákrut, svetlou výškou atď.

2.2 Reprezentácia grafov v počítači

Existuje viacero spôsobov ako zadávať graf do počítača. Niektoré sú vhodné na ilustrovanie niektorých pojmov a niektoré sa používajú pri ukladaní grafových štruktúr do pamäte počítača. Rôzne spôsoby majú rôznu pamäťovú zložitosť a čas prístupu k žiadanej informácii. Graf vieme reprezentovať nasledujúcimi spôsobmi:

1. **Reprezentácia diagramom.** Je vhodná na znázornenie vlastností grafu, no nie je vhodná na prácu s počítačom.
2. **Reprezentácia zoznamom vrcholov a hrán.** V počítači môžeme reprezentovať množinu vrcholov ako jednorozmerné pole $V[i]$ a množinu hrán reprezentujeme dvojrozmerným poľom $H[j, k]$, kde každý riadok zodpovedá jednej hrane. V neorientovanom grafe sú $H[j, 1]$ a $H[j, 2]$ koncové vrcholy j -tej hrany. Keďže hrany uv a vu sú totožné, môžeme používať jednotný spôsob zápisu a požadovať $H[j, 1] < H[j, 2]$. Táto podmienka neurčuje poradie hrán v zozname, ale iba poradie koncových vrcholov v zápise jednej hrany. V digrafe je $H[j, 1]$ začiatkový vrchol a $H[j, 2]$ koncový vrchol j -tej

orientovanej hrany. V tomto prípade podmienku $H[j, 1] < H[j, 2]$ použiť nemôžeme, pretože poradie vrcholov určuje orientáciu hrany. Ak pracujeme s grafom s ohodnotenými hranami, môžeme pridať ďalšie jednorozmerné pole $c[j]$, kde si budeme ukladať hodnoty hrán, alebo môžeme pracovať s dvojrozmerným poľom s tromi stĺpcami, kde $H[j, 3]$ je ohodnotenie hrany j . Tento spôsob reprezentácie grafu je pamäťovo nenáročný. Pamäťová zložitosť tejto reprezentácie je $O(n + m)$, prípadne $O(m)$, ak sú vrcholy označené číslami a nemusíme ich ukladať samostatne. Využíva sa pri algoritmoch založených na postupnom prehľadávaní všetkých hrán grafu. Nie je to však vhodné pre algoritmy, kde pre náhodne vrcholy u, v potrebujeme zistiť existenciu hrany. V tomto prípade pre každú odpoveď potrebujeme prehľadať celý graf, čo je časovo veľmi náročné. Časová zložitosť takejto operácie je preto $O(m)$.

j resp. i	1	2	3	4	5	6	7
$H[j, 1]$	1	2	2	3	3	4	5
$H[j, 2]$	2	5	6	4	6	6	6
$H[j, 3]$	5	1	3	2	2	3	4
$V[i]$	1	2	3	4	5	6	

j resp. i	1	2	3	4	5	6	7	8
$H[j, 1]$	2	2	3	3	4	5	6	6
$H[j, 2]$	1	6	4	5	3	2	4	5
$H[j, 3]$	2	3	1	1	2	1	4	8
$V[i]$	1	2	3	4	5	6		

Obr. 2.3: Reprezentácia grafu G_1 a digrafu $\vec{G}_2$ na obrázku 2.2 množinami vrcholov a hrán.

3. **Reprezentácia maticou susednosti** $M = (m_{i,j})$. Ak graf $G = (V, H)$ má n vrcholov, jedna sa o štvorcovú maticu typu $n \times n$. Pamäťová zložitosť je $O(n^2)$. Platí:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak } v_i v_j \in H, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

V prípade digrafu platí $m_{i,j} = 1$ práve vtedy, keď existuje orientovaná hrana $\overrightarrow{v_i v_j}$, teda hrana vychádzajúca z vrcholu v_i a vchádzajúca do vrcholu v_j . Táto matica je pre grafy symetrická podľa hlavnej diagonály. Pre digrafy to neplatí. Hodnoty 0 a 1 sa dajú nahradiť aj inými hodnotami (true, false, $\infty, \dots$). Pri hranovo ohodnotenom grafe môžeme namiesto hodnoty 1 uložiť ohodnotenie príslušnej hrany. Neexistujúcu hranu potom označíme špeciálnou hodnotou, napríklad ∞ , aby sme ju vedeli odlíšiť od existujúcej hrany s nulovým ohodnotením. Matica susednosti umožňuje zistiť existenciu hrany medzi dvoma vrcholmi v čase $O(1)$. Je preto vhodná najmä pre husté grafy, teda grafy s veľkým počtom hrán. Na prehľadanie všetkých susedov jedného vrcholu musíme skontrolovať celý príslušný riadok matice, čo trvá $O(n)$. Pre riedke grafy je preto zvyčajne vhodnejšia reprezentácia pomocou zoznamov

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Obr. 2.4: Reprezentácia grafu G_1 a digrafu $\vec{G}_2$ na obrázku 2.2 pomocou matíc susednosti.

susedov. Pri multigrafe môže prvok $m_{i,j}$ obsahovať počet hrán medzi vrcholmi v_i a v_j .

4. Reprezentácia zoznamov vrcholov okolia každého vrcholu grafu.

Nech $G = (V, H)$ je graf. Každému vrcholu $v \in V$ priradíme množinu $V(v)$, čo predstavuje zoznam susedov daného vrcholu. Pre digrafy rozlišujeme dva druhy zoznamov: $V^+(v)$ je zoznam koncových vrcholov hrán vychádzajúcich z vrcholu v a $V^-(v)$ je zoznam začiatočných vrcholov hrán vchádzajúcich do vrcholu v . Tieto zoznamy zodpovedajú výstupnej, resp. vstupnej hviezde vrcholu v . Pre neorientované grafy je každá hrana uložená dvakrát. V počítači túto štruktúru vieme reprezentovať jednorozmerným poľom $V[]$. Do poľa najprv zapisujeme susedov vrcholu v_1 , potom susedov vrcholu v_2 a takto pokračujeme. Zároveň využijeme pole smerníkov $S[]$, kde zapisujeme pozíciu prvého suseda i -teho vrcholu. Koniec zoznamu susedov vrcholu v_i je určený hodnotou $S[i + 1]$. Na pozícii $S[n + 1]$ je uložená pozícia prvého nepoužitého miesta v poli V . Ak máme ohodnotený graf, môžeme súčasne s poľom V udržiavať pole C ohodnotení hrán. Jej pamäťová zložitosť je $O(n + m)$. Táto štruktúra je vhodná pre algoritmy kde máme prehľadávať okolie vrcholu. Hodí sa pre grafy s malým počtom hrán a taktiež pre multigrafy. Jej pamäťová zložitosť je $n + m$.

$V :$	2	1	5	6	4	6	3	6	2	6	2	3	4	5
$C :$	5	5	1	3	2	2	2	3	1	4	3	2	3	4
$S :$	1	2	5	7	9	11	15							

Obr. 2.5: Reprezentácia grafu G_1 na obr. 2.2 zoznamom vrcholov.

V:	1	6	4	5	3	2	4	5
C:	2	3	1	1	2	1	4	8
S:	0	1	3	5	6	7	9	

Obr. 2.6: Reprezentácia digrafu $\vec{G}_2$ na obr. 2.2 zoznamom výstupných hviezd.

V:	2	5	4	3	6	3	6	2
C:	2	1	2	1	4	1	8	3
S:	1	2	3	4	6	8	9	

Obr. 2.7: Reprezentácia digrafu $\vec{G}_2$ na obrázku 2.2 zoznamom vstupných hviezd.

5. **Reprezentácia maticou incidencie** $B = (b_{i,j})$. Ak graf G má n vrcholov a m hrán, jedna sa o maticu typu $n \times m$. Pamäťová zložitosť je $O(nm)$. Platí:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak vrchol } v_i \text{ je incidentný s hranou } h_j \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

Ak sa jedná o digraf, pribudnú nám hodnoty -1 .

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak vrchol } v_i \text{ je začiatkový vrchol hrany } h_j \\ -1, & \text{ak vrchol } v_i \text{ je koncový vrchol hrany } h_j \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

Tento spôsob reprezentácie je vhodný aj pre multigrafy a migrafy, pretože jednotlivým hranám vrátane viacnásobných hrán zodpovedajú samostatné stĺpce matice. V migrafe majú orientované hrany hodnoty 1 a -1 , zatiaľ čo neorientované hrany majú pri oboch koncových vrchoch hodnotu 1 . Ak sú povolené slučky, neorientovaná slučka má v príslušnom riadku hodnotu 2 , pretože je s daným vrcholom incidentná dvakrát. Pri orientovanej slučke začiatkový a koncový vrchol splývajú, a preto sa hodnoty 1 a -1 navzájom vyrušia. Príslušný stĺpec by bol nulový, takže orientované slučky nemožno pomocou tejto incidenčnej matice jednoznačne zachytiť.

Incidenčná matica plytvá miestom, jej rozmer je $n \times m$, pričom počet nenulových prvkov je $2m$. Napriek svojej priestorovej náročnosti incidenčná matica vrcholov a hrán neponúka žiadne časové úspory. Práve naopak. Preto jej praktické využitie je veľmi zriedkavé. Napriek veľkej pamäťovej náročnosti má incidenčná matica významné využitie v algebraickej teórii grafov, pri riešení úloh sieťových tokov a pri formulovaní optimalizačných úloh.

Doteraz uvedené reprezentácie grafov a digrafov zďaleka nevyčerpávajú všetky možnosti. V závislosti od vlastností grafu a riešeného problému možno použiť aj

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obr. 2.8: Reprezentácia G_1 a $\vec{G}_2$ na obrázku 2.2 pomocou incidenčných matic.

ďalšie reprezentácie, napríklad maticu vzdialeností, Laplaceovu maticu alebo reprezentácie založené na stromových dátových štruktúrach. Pri implementácii grafových algoritmov sa používajú aj ďalšie pomocné dátové štruktúry, napríklad zásobník, rad, prioritný rad alebo disjunktné množiny. Výber reprezentácie a dátových štruktúr môže výrazne ovplyvniť časovú aj pamäťovú zložitosť algoritmu.

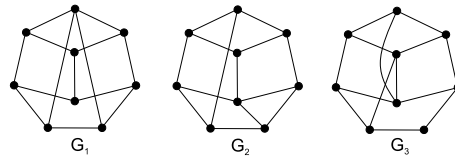
2.3 Úlohy

1. Dokážte, nasledujúce tvrdenia:

- Súčet stupňov všetkých vrcholov v grafe G sa rovná dvojnásobku počtu hrán.
- V každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa vždy párny.
- Neexistuje konečný graf, ktorého stupne vrcholov sú navzájom rôzne.
- Ak má graf práve dva vrcholy rovnakého stupňa, tak obsahuje izolovaný vrchol, alebo vrchol susediaci so všetkými vrcholmi v grafe.
- Ak n -vrcholový graf pozostáva z k komponentov ($n > k \geq 1$), tak obsahuje navyše $\binom{n-k+1}{2}$ hrán.
- Dokážte, že pre každý graf G je $\delta(G) \leq \frac{2|H|}{|V|} \leq \Delta(G)$.
- V skupine aspoň šiestich ľudí vždy existujú aspoň traja ľudia, ktorí sa navzájom nepoznajú, alebo aspoň traja ľudia, ktorí sa navzájom poznajú.
- Ak graf G neobsahuje K_3 ako podgraf, tak $|V(G)| \geq \Delta(G) + \delta(G)$.
- Ak G je bipartitný graf, tak $|H(G)| \leq \frac{|V(G)|^2}{4}$.
- Ak $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, tak graf G je súvislý. Je možné danú hranicu nahradiť číslom $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$?

2. Zistíte, či nasledujúce postupnosti sú grafové. Ak áno, nakreslite aspoň dva neizomorfné diagramy prisluchajúce k týmto postupnostiam.
 - (a) $(4, 4, 3, 2, 1, 0)$
 - (b) $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0)$
 - (c) $(7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0)$
 - (d) $(4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$
 - (e) $(5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3)$
 - (f) $(6, 6, 6, 6, 5, 4, 3)$
 - (g) $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0)$
 - (h) $(7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1)$
3. Nakreslite všetky súvislé 4-vrcholové grafy.
4. Dokážte, že existuje práve 11 navzájom neizomorfných grafov na 4 vrchoch. Nakreslite ich.
5. Nájdite najmenší graf (t.j. s minimálnym možným počtom vrcholov) so šiestimi vrcholmi stupňa 3, ostatnými vrcholmi stupňa najviac 2 a s 12 hranami.
6. Nech G je graf s 9 vrcholmi, pričom každý vrchol má stupeň 5 alebo 6. Dokážte, že G má aspoň 5 vrcholov stupňa 6 alebo aspoň 6 vrcholov stupňa 5.
7. Zostrojte všetky 5-vrcholové grafy, ktoré
 - (a) neobsahujú graf $K_{1,2}$ ako podgraf.
 - (b) neobsahujú graf $K_{1,2}$ ako indukovaný podgraf.
8. Popíšte všetky grafy, ktoré sú nadgrafmi grafu $K_{1,2}$ a súčasne podgrafmi grafu $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{ab, bc, ac, bd, cd, de\}$.
9. Nájdite všetky bipartitné grafy, ktorých komplementy sú tiež bipartitné.
10. Nájdite najmenší možný príklad (t.j. s minimálnym počtom vrcholov) dvoch súvislých neizomorfných grafov s rovnakou postupnosťou stupňov vrcholov.
11. Nájdite všetky navzájom neizomorfné kubické grafy na 8 vrchoch.
12. Ak n -vrcholový graf obsahuje $n - 1$ rôznych stupňov vrcholov, ktorý z nich sa opakuje?
13. Určte všetky dvojice (k, n) prirodzených čísel, pre ktoré existuje k -regulárny graf na n vrchoch.

14. Koľko existuje rôznych n -vrcholových grafov?
15. Zistíte či grafy na obrázku sú izomorfné.



2.4 Matlab

Definícia grafov:

- **G=graph** vytvorí prázdny graf G bez vrcholov a hrán.
- **G=graph(A)** Vytvorí graf, kde A je štvorcová, symetrická matica susednosti. Ak matica pozostáva len z núl a jednotiek, vytvorí graf, ktorý nemá ohodnotené hrany.
- **G=graph(A,nodenames)** Vloží špeciálne názvy vrcholov ($G = graph(A,abcd)$).
- **G=graph(A,'omitselfloops')** Ignoruje prvky na diagonále. Vráti graf bez slučiek.
- **G=graph(s,t)** Vytvorí graf s hranami, kde začiatok hrany je vrchol prvého vektora a koniec hrany je tej istej pozícii ako začiatok v druhom vektore.
- **G = graph(s,t,weights)** Vloží váhy hrán.
- **G = graph(s,t,weights,nodenames)** Vloží názvy vrcholov.
- **G = graph(s,t,'omitselfloops')** Vráti graf bez slučiek.

Základné funkcie:

addedge	vloží novu hranu
rmedge	vymaže hranu
addnode	vloží nový vrchol
rmnode	vymaže vrchol
flipedge	zmení orientáciu hrany
findedge	nájde hranu
findnode	nájde vrchol
numedges	vráti počet hrán
numnodes	vráti počet vrcholov
edgecount	vráti počet hrán medzi dvoma vrcholmi
reordernodes	zmení poradie vrcholov
subgraph	vráti podgraf
G.Edges.Weight(findedge(G,1,3))	vráti váhu hrany
N=neighbors(G,'B')	vráti susedov vrcholu B