

príklad: $f: y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

ako sa správajú funkcie hodnoby na okolí bodu 1

x	0,9	0,99	1	1,01	1,1
f(x)	2,9	2,99	N	3,01	3,1

ak $x \rightarrow 1$ $f(x) \rightarrow 3$

zapišeme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

$f(x)$ definovaná $\mathcal{O}^0(1)$

ak hovoríme o limite funkcie $f(x)$ v bode a (tak f je def. na $\mathcal{O}^0(a)$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

tak vyjadruje to, že ak $x \rightarrow a$, tak $f(x) \rightarrow b$

Definícia

Nech $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nech funkcia f je definovaná na prstencovom okolí bodu a . ($\mathcal{O}^0(a)$). Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje také prstencové okolí $\mathcal{O}_\delta(a)$, že pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a)$ platí, že $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, potom hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu b . Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

skrátenejší zápis definície:

$$(\forall \mathcal{O}_\varepsilon(b)) (\exists \mathcal{O}_\delta(a)); f(\mathcal{O}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

Veta

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$, potom $b_1 = b_2$.

Funkcia má v bode najvyššiu jednu limitu!

Definícia

Limita sprava

Nech f je definovaná na pravom okolí bodu a . Hovoríme, že b je limitou sprava funkcie f v bode a , pričom píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje okolie $\mathcal{O}_\delta^+(a)$, že pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^+(a)$ je $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$.

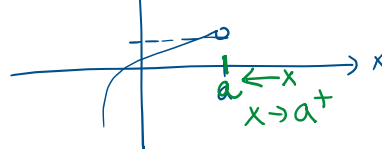
Limita zľava

Nech f je definovaná na ľavom okolí bodu a . Hovoríme, že b je limitou zľava funkcie f v bode a , pričom píšeme $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje okolie $\mathcal{O}_\delta^-(a)$, že pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^-(a)$ je $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$.

← JEDNOSTRANNE LIMITY

LIMITA SPRAVA

$$(\forall \mathcal{O}_\varepsilon(b)) (\exists \mathcal{O}_\delta^+(a)) (\forall x \in \mathcal{O}_\delta^+(a)) f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

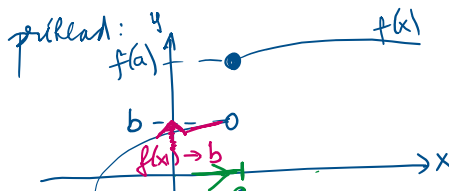


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

LIMITA ZĽAVA

$$(\forall \mathcal{O}_\varepsilon(b)) (\exists \mathcal{O}_\delta^-(a)) (\forall x \in \mathcal{O}_\delta^-(a)) f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$



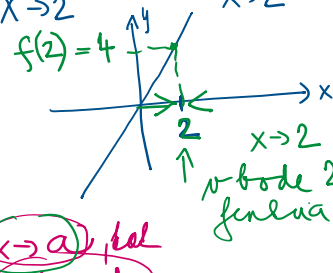
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

LIMITA FUNKCIE → veľmi dôležitý pojem (vlastnosť funkcie)
pomocou limity zavedieme spojitosť
deriváciu funkcie

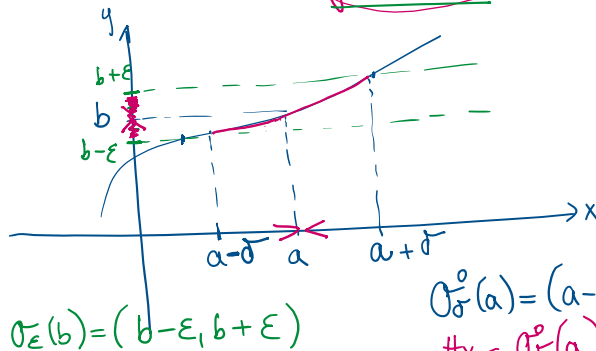
príklad:

$$f: y = 2x; D(f) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) = f(2) = 4$$



v bode 2 bola funkcia definovaná $\mathcal{O}^0(2)$.

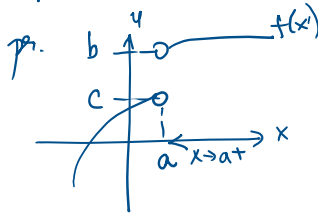
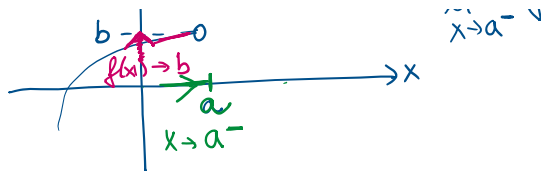


$$\mathcal{O}_\delta^0(a) = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$$

$$\forall x \in \mathcal{O}_\delta^0(a)$$

$$f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b).$$

! Funkcia má v bode najvyššiu jednu limitu



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{neexistuje}$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$

Veta

Funkcia má v bode a limitu práve vtedy, ak má v bode a limitu sprava aj zľava a platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Pozn.: Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Potom

- ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že ide o vlastnú limitu
- ak $b \in \{\pm\infty\}$, hovoríme, že ide o nevlastnú limitu

Vlastná limita - vlastnosti

vlastných limit

Veta

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Potom platí

- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
- nech $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, potom $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$
- ak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$
- ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a g je ohraničená funkcia, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

! ak limity existujú a sú vlastné !

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x + x^2) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) + \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) = 4 + 4 = 8$
 výsledok nie je $\pm\infty$, je to vlastné číslo, hovoríme, limita je vlastná

príklad
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Nevlastná limita - vlastnosti

Veta

- ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, tak $\lim_{x \rightarrow a} [-f(x)] = -\infty$
- ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, tak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$
- ak $\forall x \in D(f)$ je $f(x) < 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- ak $\forall x \in D(f)$ je $f(x) > 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
- ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

príklad
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0^+} \right) = \infty$

kde $f(x) \rightarrow 0$
 $f(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty$

kde $f(x) \rightarrow 0$
 $f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{\pm\infty} \right) = 0$
 $f(x) \rightarrow \infty$ alebo $-\infty$

príklad:
 počítanie
 nekonečnom

$$\infty + \infty = \infty$$

$$b + \infty = \infty$$

$$\infty - b = \infty$$

$$b \cdot \infty = \infty \quad \text{ak } b > 0$$

$$b \cdot \infty = -\infty \quad \text{ak } b < 0$$

$$\infty - \infty = ? \rightarrow \text{neurčitý výraz}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\infty - \infty)$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

neurčitý výraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

neurčité výrazy:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

POČÍTANIE LIMÍT

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1. dosadím za $x=a$ v predpise funkcie $\rightarrow$ dostanem niečo rozumne (MÁM VÝSLEDOK)

dostanem neurčitý výraz **2 PROBLEM?**
"vhodnými" úpravami odstránim neurčitost.

příklady: Vypočítajme limity.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2) + (x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x+3} = \frac{2^2+1}{2+3} = 1$$

$a^2 - b^2$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + 1}{\sqrt{3x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1-1}{x \cdot (\sqrt{3x+1} + 1)} =$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

(násobenie 1, pripočítanie 0 je stále O.K)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(\sqrt{3x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 + x + 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 + x + 3} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$$

polynom / polynom $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

Zapamätáme si

počítame
spamäti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$$

$\rightarrow$ 1. polynom v čitateli aj v menovateli je rovnakého stupňa, výsledok je podiel koeficientov pri najvyšších mocninách.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 2x + 4}{5x^3 - 2x^2} = \frac{8}{5}$$

2. polynom v čitateli je vyššieho stupňa ako v menovateli $(\pm \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$$

3. polynom v menovateli je vyššieho stupňa ako v čitateli (0)

$x \rightarrow \infty$ $x^2 - 1$ ($\sim$)
③ polynom v menovateľi vyššieho stupňa ako v čitateli (0)
 $x+4$