

Definícia

Ohraničené funkcie

Funkciu f nazývame zhora (zdola) ohraničenou na množine $M \subset D(f)$, ak je zhora (zdola) ohraničená množina jej funkčných hodnôt $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$.

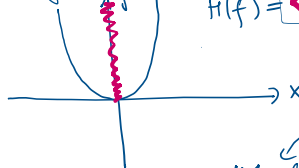
Ak je funkcia f ohraničená zhora aj zdola na množine M , tak hovoríme, že je ohraničená na množine M .

príklady:

$$f: y = x^2$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$H(f) = \langle 0, \infty \rangle$$



ohraničená zdola $\rightarrow$

ANO

ohraničená zhora $\rightarrow$

$\rightarrow$ nie je

na celom definičnom obore

) $\mathbb{R}$

$$\in \langle 1, 2 \rangle$$

a zhora.

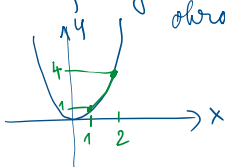
príklad:

$$f: y = x$$

ohraničená na množine M

$$f(M) = \langle 1, 4 \rangle$$

na množine M je funkcia ohraničená zdola, aj



Definícia

Maximum a minimum funkcie

Ak má množina $f(M)$ najväčší (najmenší) prvok, tak toto číslo nazývame maximum (minimum) funkcie f na množine M a označujeme:

$$\max_{x \in M} f(x)$$

$$\left(\min_{x \in M} f(x) \right)$$

príklad:

$$f: y = x^2$$

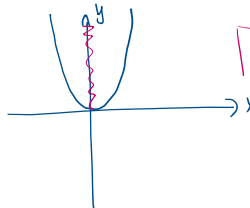
$$D(f) = \mathbb{R}$$

určíme min, max na celom $D(f)$

$$H(f) = \langle 0, \infty \rangle$$

$$\min_{x \in D(f)} f(x) = 0$$

$$\max_{x \in D(f)} f(x) = \text{nema' max.}$$

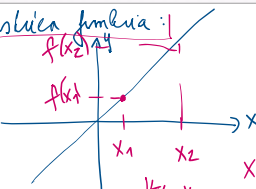


Definícia

Rýdzomonotónne funkcie

Funkciu f nazývame rastúcou (klesajúcou) na množine $M \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

rastúca funkcia:



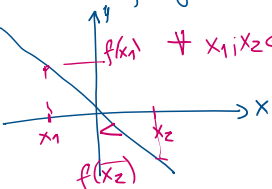
$$f: y = x, D(f) = \mathbb{R}$$

$$x_1 < x_2 \text{ platí } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in M \subset D(f)$$

klesajúca funkcia:

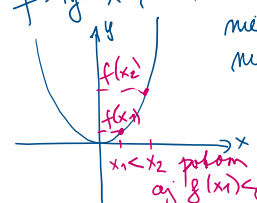
$$f: y = -x, D(f) = \mathbb{R}$$



$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2$$

$$\text{platí } f(x_1) > f(x_2)$$

príklad: $f: y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$



nie je rastúca na celom $D(f)$

nie je klesajúca na celom $D(f)$

na $\langle 0, \infty \rangle$ je rastúca

na $(-\infty, 0)$ je klesajúca

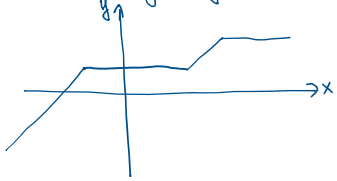
$$x_1 < x_2 \text{ potom } f(x_1) < f(x_2), x_1, x_2 \in \langle 0, \infty \rangle$$

Definícia

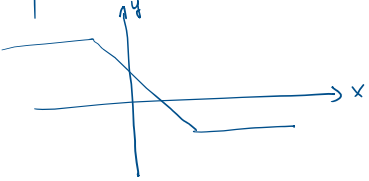
Monotónne funkcie

Funkciu f nazývame neklesajúcou (nerastúcou) na množine $M \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

príklad: neklesajúca funkcia na celom $D(f)$



príklad: nerastúca funkcia na celom $D(f)$



Definícia

Párne a nepárne funkcie

Funkcia f sa nazýva párna, resp. nepárna, ak platí

1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,

2. $f(x) = f(-x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

1. podmienka je na definičný obor: musí byť "SYMETRICKÝ"

príklady: $\mathbb{R}, \langle -1, 1 \rangle, (-60, 60)$ i $\langle -1, 2 \rangle$

$$\forall x \text{ aj } -x \in D(f)$$

neplatí

príklad: NEPÁRNA

$$f: y = x^3, D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{príklad: PÁRNA } f: y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$$

$$y = x^3$$

1. $f(x) = f(-x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

príklad: PÁRNA

$$f: y = x^2; D(f) = \mathbb{R}$$

1. $\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ ÁNO ✓

$$2. f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$$

áno $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D(f)$
je PÁRNA

príklad: NEPÁRNA

$$f: y = x^3; D(f) = \mathbb{R}$$

1. $\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ ÁNO ✓

$$2. f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3$$

$$-f(x) = -x^3 \text{ platí } f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

je NEPÁRNA

GRAF párnej funkcie je
symetrický podľa osy

GRAF NEPÁRNEJ
FUNKCIE je
symetrický podľa bodu [0,0]

príklad: $f: y = x^2; D(f) = \langle 0, \infty \rangle$

1. $\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$? → NIE

nie je ani párna ani nepárna

ale $-1 \notin D(f)$

poznámka:
+ ... pre každé }

Definícia

Periodické funkcie

Funkciu f nazývame periodickou, ak existuje také reálne číslo $p > 0$, že platí

- pre každé $x \in D(f)$ aj $x + p \in D(f)$, $x + p \in D(f)$,
- pre všetky $x \in D(f)$ je $f(x + p) = f(x)$.

Najmenšie také číslo p nazývame periódou funkcie f .

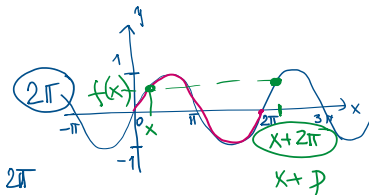
príklady:

$$f: y = \sin x; D(f) = \mathbb{R}$$

je periodická s periódou

$$f: y = \cos x; D(f) = \mathbb{R}$$

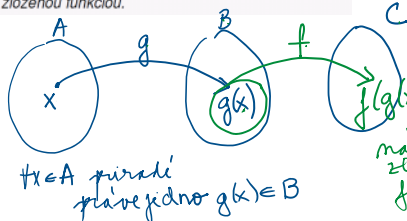
je periodická s periódou 2π



Definícia

Zložená funkcia

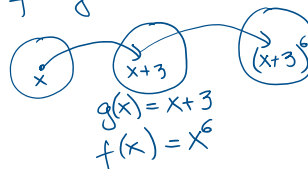
Nech $g: A \rightarrow B$, $f: B \rightarrow C$. Potom funkciu $f[g(x)]: A \rightarrow C$ nazývame zloženou funkciou.



g ... vnútorná zložka
 f ... vonkajšia zložka

príklady:

$$f: y = (x+3)^6$$



$$f: y = \sin x^2$$

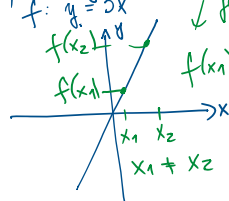
$$f: y = \log_2(2x+3)$$

Definícia

Prostá funkcia

Nech $f: A \rightarrow B$. Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkciu nazývame prostou.

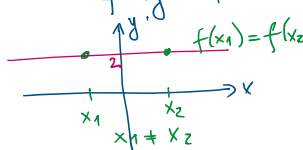
príklady:



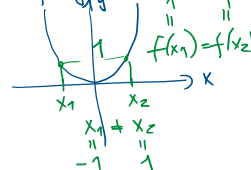
! RÝZDOMONÓTNNE FUNKCIE
SÚ PROSTÉ!

príklad: funkcia nie je prostá

$$f: y = 2, D(f) = \mathbb{R}$$



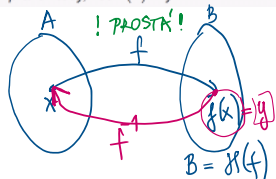
$$f: y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$$



Definícia

Inverzná funkcia

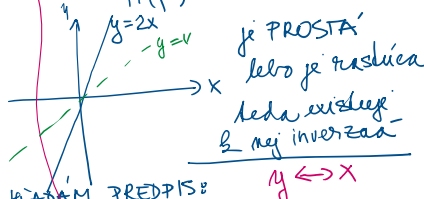
Nech $f: A \rightarrow B$ je prostá funkcia (kde $B = H(f)$). Funkciu $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f^{-1}(y) = x$ nazývame inverznou funkciou k funkcii $f: A \rightarrow B$ práve vtedy, keď $f(x) = y$.



$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$f^{-1}(y) = x, \text{ resp. } f(x) = y$$

príklady: $f: y = 2x, D(f) = \mathbb{R}$
 $H(f) = \mathbb{R}$



HLASNÝ PREDPIS:

$$x = 2y$$

$$f: y = \frac{x}{2}, D(f) = H(f) = \mathbb{R}$$



poznámka:

GRAFY navzájom inverzných funkcií sú súmerné
podľa osi $y = x$

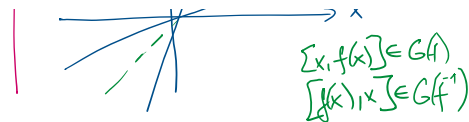
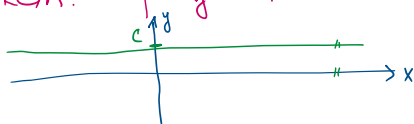
NÍZKOTRE ELEMENTÁRNE FUNKCIE

podľa OSI $|y=x|$

NIKTORÉ ELEMENTÁRNE FUNKCIE

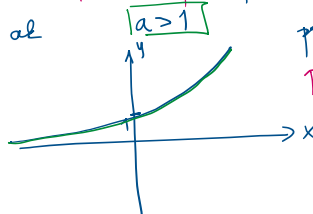
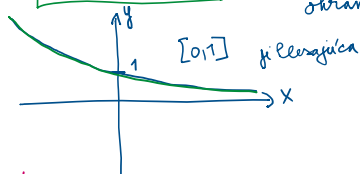
KONŠTANTNÁ FUNKCIA: $f: y=c; c \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
 $\mathcal{H}(f) = \{c\}$
 je obmedzená
 PÁRNA



EXPONENCIÁLNA FUNKCIA: $f: y=a^x, a>0, a \neq 1$ $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$

pr. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

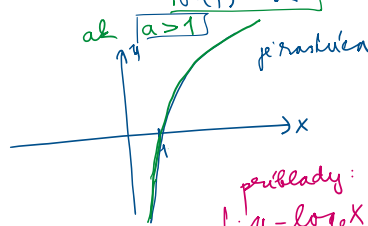
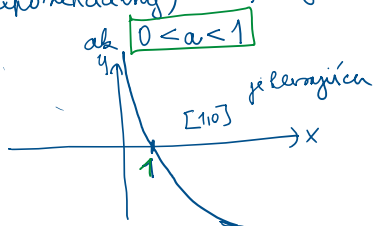


pr. $y = 10^x$
 pr. $y = e^x$
 Eulerovo číslo
 $e = 2.718...$

LOGARITMICKÁ FUNKCIA
 (inverzná k exponenciálnej)

$f: y = \log_a x; a>0, a \neq 1$

$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$
 $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$

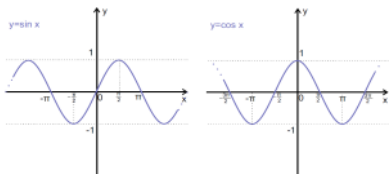


príklad:
 $\log_{10} x = \lg x$
 desiatkový logaritmus

$y = \ln(e^x) = x$
 $y = e^{\ln x} = x$

príklady:
 $f: y = \log_e x = \ln x$
 PRIRODZENÝ LOGARITMUS

Goniometrické funkcie $y = \sin x, y = \cos x$



$f: y = \sin x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = [-1, 1]$
 periodická s periódou $p = 2\pi$, je obmedzená
 je nepárna
 napr. na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rastie

$f: y = \cos x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = [-1, 1]$
 $p = 2\pi$, obmedzená, párna,
 napr. na $[0, \pi]$ klesá

? existuje inverzná k $f: y = \sin x$?

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ nie je podľa!

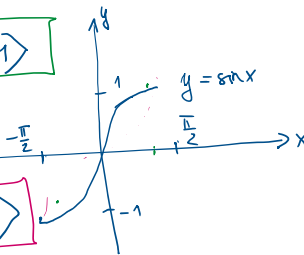
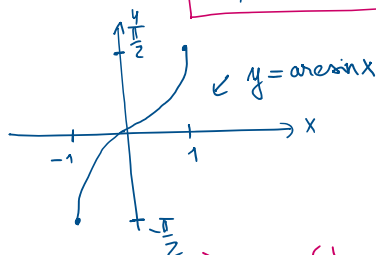
Vezmeťme zúžení $f: y = \sin x$;

je podľa, k nej inverznú funkciu nazývame arcsinus

$f^{-1}: y = \arcsin x$

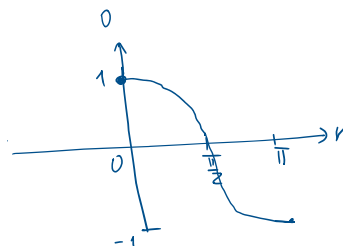
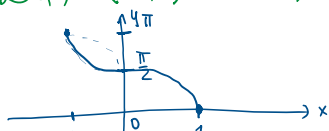
$\mathcal{D}(f^{-1}) = [-1, 1]$

$\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

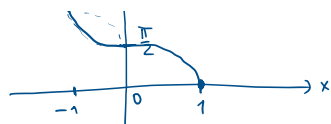
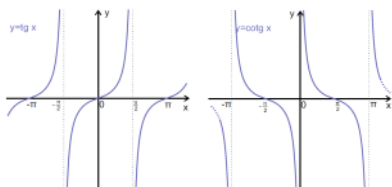


vezmeťme $f: y = \cos x; \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = [-1, 1]$
 je podľa funkcia

$f^{-1}: y = \arccos x, \mathcal{D}(f^{-1}) = [-1, 1], \mathcal{H}(f^{-1}) = [0, \pi]$



Goniometrické funkcie $y = \lg x$, $y = \cotg x$



$$y = \lg x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$x \neq \dots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

$$x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$

je nepárna

Existuje inverzá? $y = \lg x \rightarrow$ **NIE**, lebo nie je prúdá

Uzmeeme zúzenie $f: y = \lg x$; $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

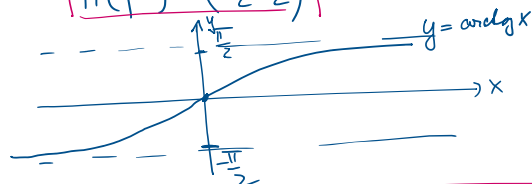
$$\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}: y = \arctg x$$

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$H(f^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



$$y = \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$$

$$\sin x \neq 0$$

$$x \neq k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Uzmeeme $f: y = \cotg x$ pre $x \in (0, \pi)$ (je klesajúca, leda prúdá existuje f^{-1})

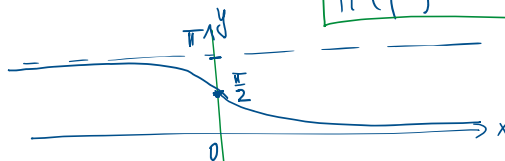
$$\mathcal{D}(f) = (0, \pi)$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}: y = \operatorname{arccotg} x$$

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$H(f^{-1}) = (0, \pi)$$



$$\{0, \frac{\pi}{2}\}$$

INVERZNE KU GONIOMETRICKÝM SA NAZÝVAJU CYKLOMETRICKE!