

NMPaMŠ – 9. cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Rozdelenia pravdepodobnosti diskkrétnej náhodnej premennej

Binomické rozdelenie

dané v príklade

pravdepodobnosť javu A – daná alebo sa dá vypočítať

Dané $n \in \mathbb{N}$ a reálne číslo $p \in (0,1)$, náhodná veličina X má binomické rozdelenie s parametrami n a p

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

označenie $X \sim \text{bino}(n; p)$

Stredná hodnota náhodnej premennej X

$$E(X) = n \cdot p,$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p$$

Hypergeometrické rozdelenie

Dané M množina objektov, K objektov má určitú vlastnosť, $M - K$ objektov túto vlastnosť nemá. Vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vedieť pravdepodobnosť, že medzi vybranými má x objektov túto vlastnosť. Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdelenie s parametrami M, K, N**

M, K, N – dané v zadaní

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

označenie $X \sim \text{hyge}(M, K, N)$

Stredná hodnota náhodnej premennej X

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right)$$

Poissonove rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskkrétnej náhodnej premennej X , ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu. . .
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ .

Náhodná veličina X má **poissonovo rozdelenie s parametrom λ**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

označenie $X \sim \text{poiss}(\lambda)$

Stredná hodnota

$$E(X) = \lambda$$

Disperzia

$$D(X) = \lambda$$

Smerodajná odchýlka

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Pr. 1 – P40:

V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:

- a) zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- b) pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
- c) strednú hodnotu náhodnej premennej X ,
- d) distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

Pr. 2 – P37:

Pravdepodobnosť vyklíčenia každej kôstky avokáda je 0,9. Zasadili sme 3 kôstky. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet kôstok, ktoré vyklíčia.

- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X .
- Vypočítajte strednú hodnotu, modus a disperziu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte pravdepodobnosť, že aspoň dve kôstky z troch vyklíčia.

a) X – počet kôstok, ktoré vyklíčia

$$x_i = 0, 1, 2, 3$$

A – kôstka vyklíči

$$p(A) = 0,9$$

$$n = 3$$

$$X \sim \text{bino}(3; 0,9)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$$

0 kôstok, ktoré vyklíčia $P(0) = \binom{3}{0} 0,9^0 \cdot 0,1^3 = 0,001$

1 kôstka, ktorá vyklíči $P(1) = \binom{3}{1} 0,9^1 \cdot 0,1^2 = 0,027$

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| p_i | 0,001 | 0,027 | 0,243 | 0,729 |

b) $E(X) = p \cdot n = 0,9 \cdot 3 = 2,7$ $M_0(X) = 3$ $D(X) = p \cdot n \cdot q = 0,9 \cdot 3 \cdot 0,1 = 0,27$

c) $P(X \geq 2) = p_2 + p_3 = 0,243 + 0,729 = 0,972$

Pr. 3 – P52:

Na cvičenia z matematiky v priebehu jednej minúty príde 5 študentov.

- a) Určte pravdepodobnosť, že v priebehu 30 sekúnd na cvičenia nepríde žiaden študent.
- a) Určte pravdepodobnosť, že v priebehu 2 minút na cvičenia prídu najviac dvaja študenti.

Pr. 4 – P41:

V súbore 10 výrobkov je osem prvej kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu výrobkov prvej kvality medzi 5 vybranými. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X .

$M = 10$ – počet všetkých výrobkov

$K = 8$ – počet kvalitných výrobkov

$M - K = 2$ – počet nepodarkov

$N = 5$ – počet náhodne vybraných výrobkov

$X \sim \text{hyge}(10, 8, 5)$

X – počet výrobkov prvej kvality medzi 5 vybranými

$x_i = 3, 4, 5$

| | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 3 | 4 | 5 |
| p_i | $\frac{2}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{8}{3} \binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{8}{4} \binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{8}{5} \binom{2}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$E(X) = \frac{N \cdot K}{M} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4$$

$$D(X) = \frac{(M - N)N \cdot K}{(M - 1)M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{9 \cdot 10} \left(1 - \frac{8}{10}\right) = \frac{200}{90} \cdot 0,2 = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{2}{3}$$

Pr. 5 – P53:

Do predajne príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že a) v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník,

b) v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci.

a)

príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu (za 60 minút) = priemerný počet výskytov javu

$$\lambda = \frac{90}{60} 5 = \frac{15}{2} - \text{priemerný počet výskytov javu v danom intervale}$$

$$X \sim \text{poiss} \left(\frac{15}{2} \right)$$

X = v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník

$$x_i = 0$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X = 0) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^0 e^{-\frac{15}{2}}}{0!} = 0,000553$$

b)

príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu (za 60 minút) = priemerný počet výskytov javu

$$\lambda = \frac{90}{60} \cdot 3 = \frac{9}{2} - \text{priemerný počet výskytov javu v danom intervale}$$

$$X \sim \text{poiss} \left(\frac{9}{2} \right)$$

X = v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci (3 a viac)

\bar{X} = v priebehu 3 minút prídu do predajne najviac dvaja zákazníci (0 - 2)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

$$x_i = 0, 1, 2$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X = 0) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^0 e^{-\frac{9}{2}}}{0!} = 0,011109$$

$$P(X = 1) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^1 e^{-\frac{9}{2}}}{1!} = 0,04999$$

$$P(X = 2) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 e^{-\frac{9}{2}}}{2!} = 0,112479$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,173578 = 0,826422$$

Dú : súbor príkladov na 2. zápočtovú písomku

https://kmti.fei.tuke.sk/sites/default/files/2025-05/subor_prikladov_2_zapocet.pdf