

# NMPaMŠ – 8. cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Pravdepodobnosť

## Opakované nezávislé pokusy

**Nezávislý pokus** – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme  $n$  - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

### Bernoulliho veta

**A** - jav, **p** je jeho **pravdepodobnosť** pri danom pokuse,

**k** – počet nastatí javu A pri danom pokuse,

**n** – počet nezávislých opakovaní pokusu

**$P_{n,p}(k)$**  je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

## Pr. 1 – P25:

Predpokladajme, že hádžeme súčasné dvomi mincami. Minca má dve strany – hlava a znak. Vykonáme štyri hody. Aká je pravdepodobnosť, že

a) pri troch hodoch zo štyroch hodíme dve hlavy;

b) aspoň (najmenej) pri jednom hode zo štyroch hodíme dve hlavy.

## Pr. 2 – P26:

Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafi do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodochoch:

a) práve dvakrát trafi do koša;

b) aspoň dvakrát trafi do koša.

a) A – basketbalista trafi do koša

$$p(A) = 0,7$$

$$n = 6$$

$$k = 2 \text{ (práve dvakrát trafi)}$$

$$P_{6,0,7}(2) = \binom{6}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^4 = 0,0595$$

b) A – basketbalista trafi do koša

$$p(A) = 0,7$$

$$n = 6$$

$$k \geq 2 \text{ (aspoň dvakrát trafi, } k = 2 - 6)$$

B – basketbalista trafi kôš aspoň dvakrát pri 6 nezávislých hodochoch

$\bar{B}$  – basketbalista trafi kôš najviac jedenkrát pri 6 nezávislých hodochoch,  $k < 2$  ( $k = 0, 1$ )

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (P_{6,0,7}(0) + P_{6,0,7}(1))$$

$$P(B) = 1 - \left( \binom{6}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^6 + \binom{6}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^5 \right) = 0,9891$$

Dú: Súbor príkladov na precvičenie 2 / pravdepodobnosť: 27 - 30

# Pravdepodobnosť

## Náhodná premenná

**Náhodná premenná** – premenná, ktorá nadobúda svoje hodnoty náhodne

Náhodné premenné –  $X, Y, X_1, X_2, \dots$

Hodnoty náhodných premenných –  $x, y, x_1, x_2, \dots$

### 1. Diskrétne rozdelenie náhodnej premennej

**Pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej  $X$**

$x_j$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X = x_j) = p_j$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$$

**Distribučná funkcia  $F$  náhodnej premennej  $X$**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

**Modus diskkrétnej náhodnej premennej  $M_o(X)$**  – najpravdepodobnejšia hodnota náhodnej premennej ( $X$  z tabuľky, ktoré má najväčšiu hodnotu pravdepodobnosti)

**Stredná hodnota náhodnej premennej**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$$

**Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej  $X$**

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ kde } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i.$$

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i$$

**Smerodajná odchýlka náhodnej premennej  $X$**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

**Pr. 1 – P31:** Diskrétna náhodná premenná  $X$  je daná pravdepodobnostnou tabuľkou. Určte neznámu  $p_5$ , strednú hodnotu, modus, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej  $X$ .

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	$p_5$

$$\sum_{i=1}^5 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,1296$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 1 \cdot 0,1536 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,3456 + 4 \cdot 0,1296 = 2,4$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,72 - 2,4^2 = 0,96$$

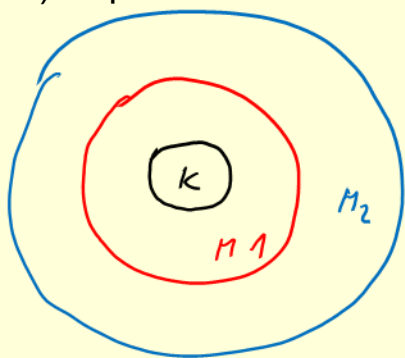
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = 6,72$$

$$M_0(X) = 2 \quad M_1(X) = 3 \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,9798$$

## Pr. 2 – P34:

Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M1 a M2. Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M1 znamená 5 bodov a do M2 znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia M1 je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia M2 je 0,2. Nech náhodná premenná X je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu náhodnej premennej X; c) pravdepodobnosti  $P(X \leq 10)$ ,  $P(5 < X \leq 15)$ ;
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X.



zásah do K - 10 bodov,  $P(K) = 0,5$

zásah do  $M_1$  - 5 bodov,  $P(M_1) = 0,3$

zásah do  $M_2$  - 0 bodov,  $P(M_2) = 0,2$

X - počet bodov pri 2 nezávis. výstreloch

$X_i = 0, 5, 10, 15, 20$  bodov

$$P(X=0) = 0,2^2 = 0,04 \quad \rightarrow \quad \underbrace{M_2}_{0} \underbrace{M_2}_{0} \rightarrow \text{prav. } 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(X=5) = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,12 \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \underbrace{M_1}_{5} \underbrace{M_2}_{0} \\ \underbrace{M_2}_{0} \underbrace{M_1}_{5} \end{array} \right\} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,2 \cdot 2$$

$$P(X=10) = 0,3^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,29$$

$$\underbrace{M_1}_{10} \underbrace{M_1}_{10} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,3$$

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{M_2}_{0} \underbrace{K}_{10} \\ \underbrace{K}_{10} \underbrace{M_2}_{0} \end{array} \right\} \rightarrow \text{pravdep. } 0,2 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=15) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,3 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n_1}{k} \\ \frac{k}{n_1} \end{array} \right\} \text{prav. } 0,3 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=20) = 0,5^2 = 0,25$$

$$\swarrow$$

$$\frac{k}{k} \text{ prav. } 0,5 \cdot 0,5$$

$x_i$	0	5	10	15	20
$p_i$	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 12,12$$

$$P(X \leq 10) = P(X=0) + P(X=5) + P(X=10)$$

$$= 0,45$$

$$P(5 < X \leq 15) = P(X=10) + P(X=15)$$

$$= 0,59$$

# Rozdelenia pravdepodobnosti diskkrétnej náhodnej premennej

## Binomické rozdelenie

dané v príklade

pravdepodobnosť javu A – daná alebo sa dá vypočítať

Dané  $n \in \mathbb{N}$  a reálne číslo  $p \in (0,1)$ , náhodná veličina  $X$  má **binomické rozdelenie** s parametrami  $n$  a  $p$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

označenie  $X \sim \text{bino}(n; p)$

**Stredná hodnota náhodnej premennej  $E(X)$**

$$E(X) = n \cdot p,$$

**Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej  $X$**

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

**Smerodajná odchýlka náhodnej premennej  $X$**

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p$$

### Pr. 3 – P35:

Predpokladajme, že hádžeme súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.

- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte  $P(0 < X \leq 2)$ ;  $P(X > E(X))$ .
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

dané:  $N = 3$  hody

$p$  - prav., že hodíme súčet 9 na 2 kockách  
(vypočítame pomocou komb. prav.)

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad m = \left. \begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{array} \right\} = 4$$

$$X \sim \text{bino} \left( 3, \frac{1}{9} \right)$$

$$n = \frac{6}{1} \cdot \frac{6}{1} = 6^2 = 36$$

može podmieť číslo od 1-6

$X$  - počet hodov, pri kt. hodíme súčet 9

$$x_i = 0, 1, 2, 3 \text{ hody}$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^3 = \frac{512}{729}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{243}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

$X_i$	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

(ii)

$$E(X) = p \cdot N = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

$$D(X) = p \cdot N \cdot q = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$