Matematika 1 , opak. – 9.cvičenie - príprava

Matice, operácie s maticami

Matica typu m × n (m riadky, n stĺpce)

$$A = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n\text{ – stĺpce}}}_{\text{m - riadky}}$$

skrátený zápis: $A = (a_{ij})$

$a_{i\,j}$ – prvok matice, kde i – itý riadok (i = 1, 2, 3, ... m)
j – itý stĺpec (j = 1, 2, 3, ... n)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matica 5×3, kde $a_{43} = 0$

Typy matíc:

Štvorcová matica - matica typu **n × n** (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Stĺpcový vektor - matica typu **n × 1** (matica s jedným stĺpcom)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Riadkový vektor - matica typu **1 × n** (matica s jedným riadkom)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica k matici A - matica, ktorú získame tak, že v matici A typu m × n <u>zameníme navzájom</u> **riadky za stĺpce**, označenie ***A^T***

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Operácie s maticami:

Súčet (rozdiel) matíc je matica $\boldsymbol{C = A \pm B}$ **typu m × n**

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Sčítavať a odpočítavať je možné len matice rovnakého typu.

Násobenie matice konštantou je matica $\boldsymbol{C = k \,.\, A}$ **typu m × n**, kde *k* je konštanta

$c_{ij} = k\, a_{ij}$ i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n.

$$\boldsymbol{k.A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k.a_{11}} & \boldsymbol{k.a_{12}} \\ \boldsymbol{k.a_{21}} & \boldsymbol{k.a_{22}} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc je matica ***C = A . B*** **typu m × n**

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

kde i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Násobiť môžeme len vtedy, ak je počet stĺpcov prvej matice *A* **rovnaký** ako počet riadkov druhej matice *B. Výsledná matica má rovnaký počet riadkov ako prvá a počet stĺpcov ako druhá.*

Součin matic $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ je

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti matíc:

Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice A typu m × n je počet nenulových riadkov matice A upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar. Označenie **h(A)**.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3
h(A) = 3

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Dve matice A a B sú ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných úprav.
Označenie **A ~ B.**

Postup pri určení hodnosti matice

1. vedieme **hlavnú diagonálu v matici** (od prvého prvku v prvom riadku zľava nadol doprava),
2. použijeme **ekvivalentné úpravy**, aby sme <u>pod hlavnou diagonálou dostali nuly</u> (postupne v jednotlivých stĺpcoch od prvého až po posledný upravujeme tak, aby pod číslami v diagonále boli nuly),
3. keď dostaneme <u>pod hlavnou diagonálou</u> len nuly, **spočítame nenulové riadky** (riadky, v ktorých je aspoň jedno číslo rôzne od nuly), hodnosť matice = počtu nenulových riadkov