

# Matematika I, opak. – 8.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Zopakujte si:

1. Stacionárny bod je bod, v ktorom je .....  $f'(x) = 0$  .....

2. Funkcia je rastúca na tých intervaloch, kde je .....  $f'(x) > 0$  .....

3. Funkcia na intervaloch, kde  $f(x)'' < 0$  je ..... **konkávna** .....

4. Body, v ktorých je  $f(x)'' = 0$  a mení sa v nich konvexnosť na konkávnosť a naopak nazývame

a) nulové body

b) stacionárne body

→ c) inflexné body.

5. Derivácia  $f(x) = x \cdot \sin x$  sa derivuje ako

→ a) súčin funkcií

b) podiel funkcií

c) zložená funkcia.

6. Derivácia  $2x^5$  je            a)  $2x^5 \ln 5$             **b)  $10x^4$**             c) 0

7. Derivácia  $\frac{2}{x}$  je            a)  $2 \ln x$             **b)  $\frac{-2}{x^2}$**             c)  $2x$

# Monotónnosť funkcie a extrémny funkcie

**Monotónnosť funkcie** – vypočítame prvú deriváciu funkcie na základe nej určíme monotónnosť a extrémny:

na intervaloch, kde  $f(x)' > 0$  je funkcia  $f(x)$  rastúca ↗

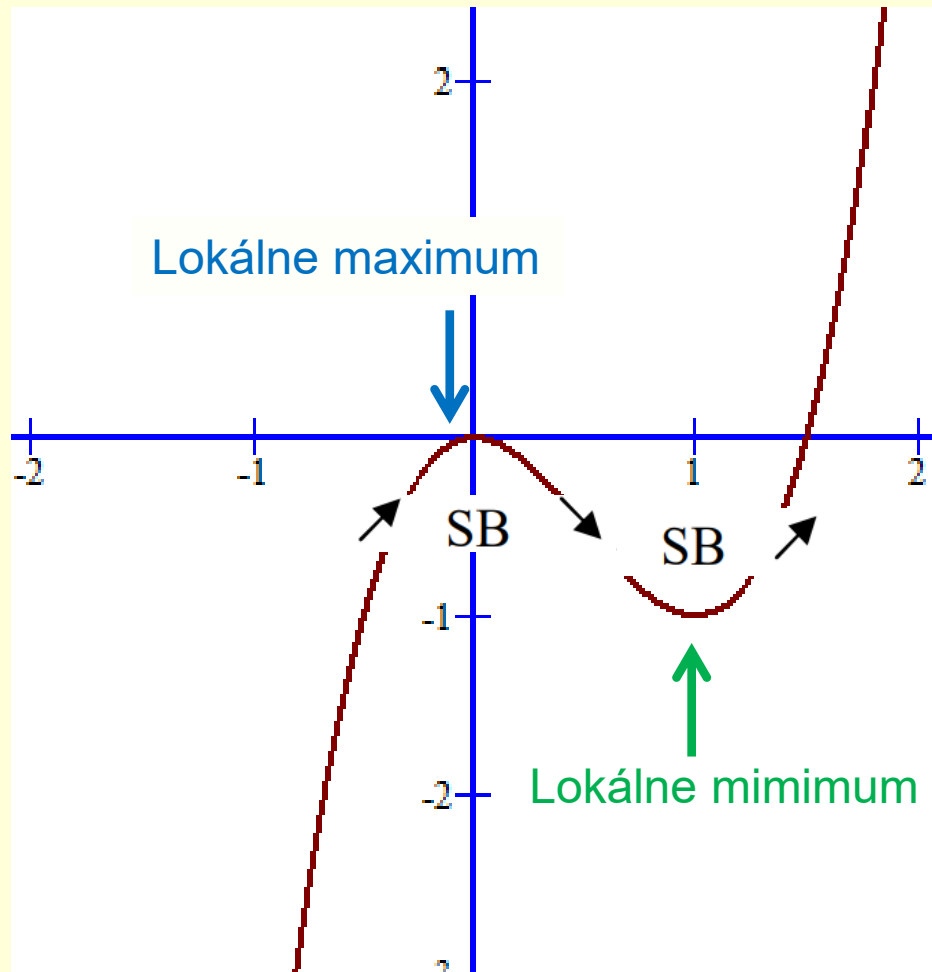
na intervaloch, kde  $f(x)' < 0$  je funkcia  $f(x)$  klesajúca ↘

*Monotónnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých  $f(x)' = 0$  alebo v bodoch, v ktorých  $f(x)'$  neexistuje.*

**Stacionárne body (SB)** – body, v ktorých je  $f(x)' = 0$

**Lokálne maximum** – ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá  
↗ **SB** ↘

**Lokálne minimum** – ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie  
↘ **SB** ↗



## Postup pri určení intervalov monotónnosti:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame prvú deriváciu funkcie
3. prvú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je  $f(x)' = 0$  – stacionárne body
4. určíme bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje
5. stacionárne body a bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme monotónnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme lokálne extrémny funkcie

# Konvexnosť, konkavnosť funkcie a inflexné body

**Konvexnosť a konkavnosť funkcie** – vypočítame druhú deriváciu funkcie

na intervaloch, kde  $f(x)'' > 0$  je funkcia *konvexná – U*

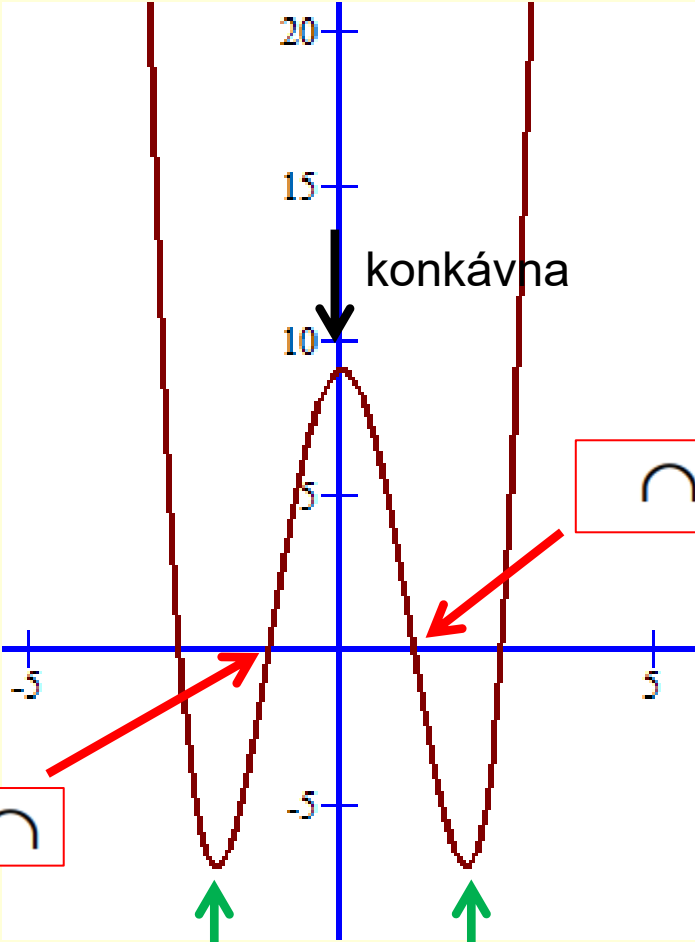
na intervaloch, kde  $f(x)'' < 0$  je funkcia *konkávna – ∩*

*Konvexnosť a konkavnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých  $f(x)'' = 0$  alebo v bodoch, v ktorých druhá derivácia funkcie  $f(x)''$  neexistuje.*

**Inflexné body (IB)** – body, v ktorých je  $f(x)'' = 0$  a sa v nich mení konvexnosť a konkavnosť

U IB ∩

∩ IB U



$\cap$  IB  $\cup$

$\cup$  IB  $\cap$

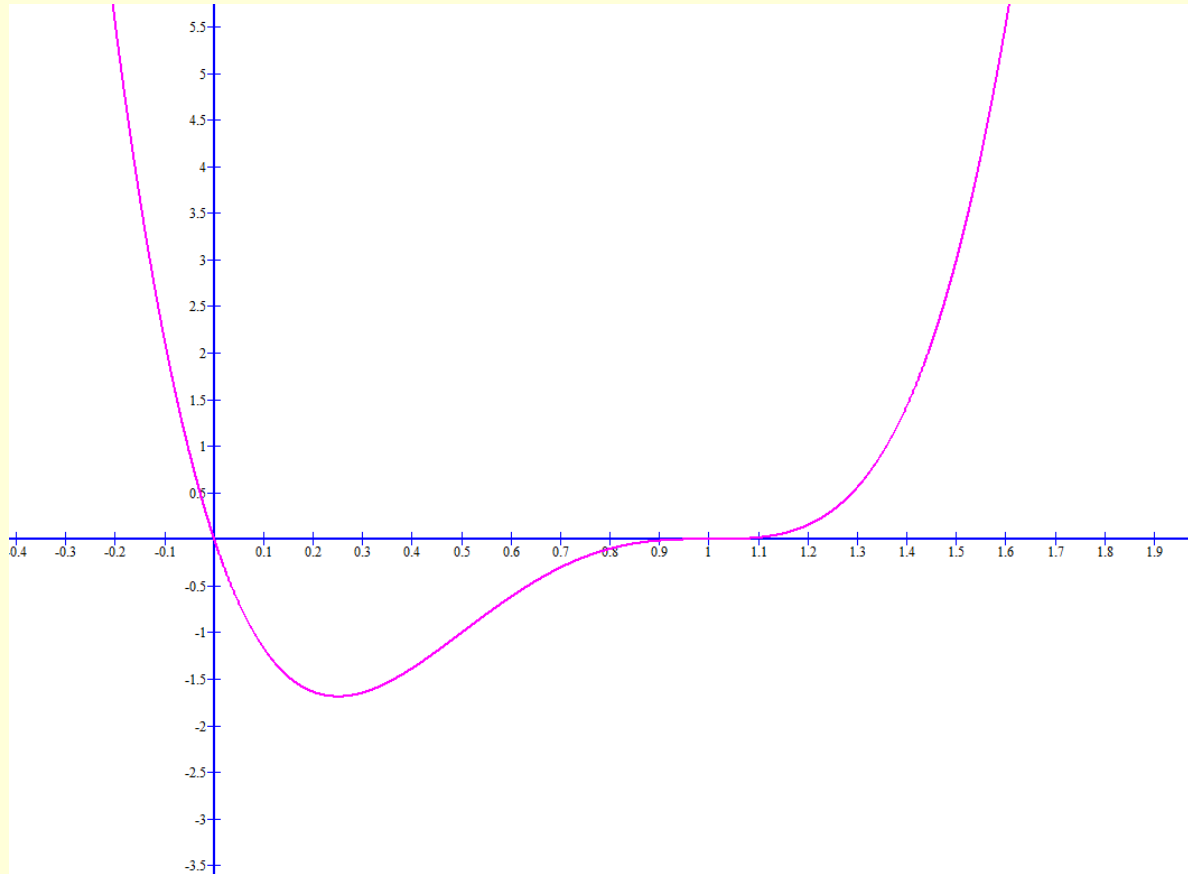
konvexná konvexná

## **Postup pri určení intervalov pre konvexnosť a konkávnosť:**

1. určíme definičný obor
2. vypočítame druhú deriváciu funkcie
3. druhú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je nulová
4. určíme bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje
5. body, v ktorých je druhá derivácia nulová a bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme infexné body funkcie

**Pr. 1 – 47 / 4:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = 16x(x - 1)^3$$



**Pr. 2 – 47 / 2:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

## Určenie monotónnosti

1. určiť definičný obor  $D(f) = \mathbb{R}$

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 3x(x + 2)$$

3. určiť  $y' = 0$  a stacionárne body (SB)




$$3x(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \quad \vee \quad (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

**SB:**  $-2, 0$

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$y'$	+	SB	-	SB	+
		lok max		lok min	

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$y' = 3x(x + 2)$ : pre  $x = -3$  znamienko +, pre  $x = -1$ , znamienko -, pre  $x = 1$ , +

**funkcia rastie na intervale  $(-\infty, -2)$  a  $(0, \infty)$  a klesá na  $(-2, 0)$**

7. nájsť lokálne extrémny funkcie

lokálne maximum je v bode  $[-2, 2]$

lokálne minimum je v bode  $[0, -2]$

## Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor  $D(f) = \mathbb{R}$

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie

$$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$$

3. určiť  $y'' = 0$   $y'' = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

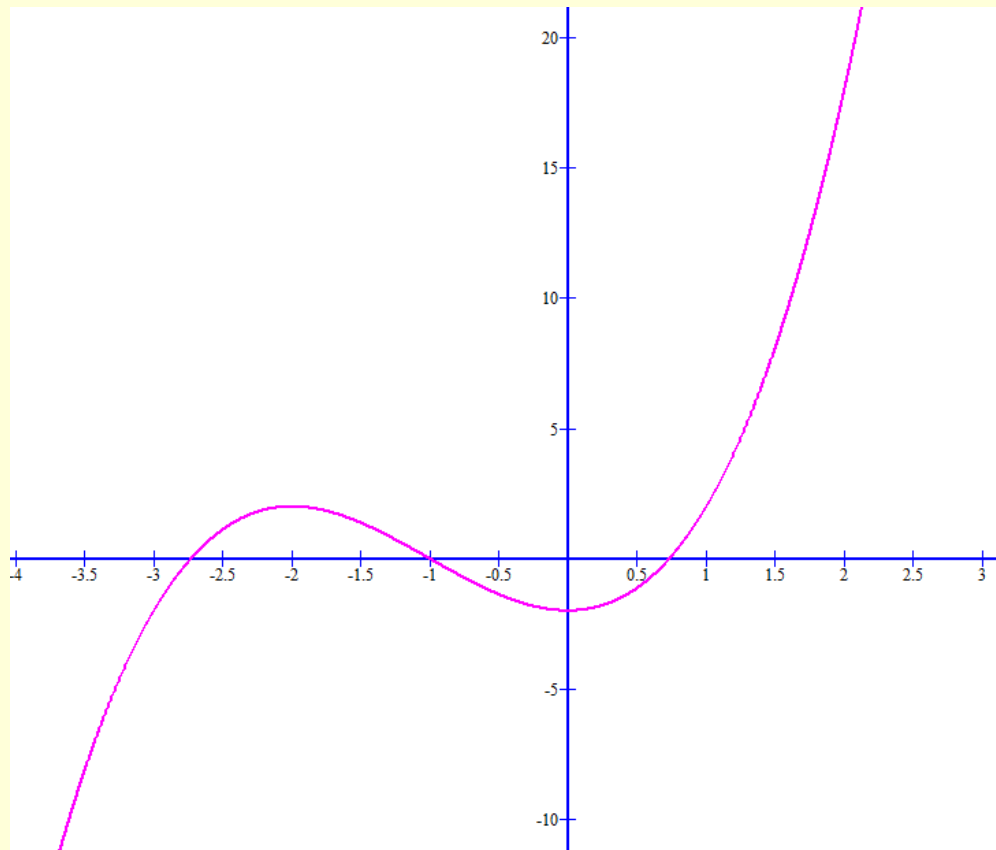
5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

	$(-\infty, -1)$	<b>-1</b>	$(-1, \infty)$
$y''$	-		+
	$\cap$	<b>IB</b>	$\cup$

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

funkcia je konvexná na  $(-1, \infty)$  a konkavná na intervale  $(-\infty, -1)$

7. Určiť inflexné body funkcie **inflexný bod má funkcia v  $[-1, 0]$**



**Pr. 3 – 47 / 11:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x - \frac{1}{x}$$

### Určenie konkávnosti a konvexnosti

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = 0 - \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 \neq 0$$

$-\frac{2}{x^3} = 0$  nikdy nenastane, **nemáme taký bod**  $\wedge x \neq 0$ , v 0 druhá derivácia neexistuje,

**bod nespojitosti : 0**

	$(-\infty, 0)$	<b>0</b>	$(0, \infty)$
$y''$	+		-
	∪	<b>BN</b>	∩

funkcia je konkávna na  $(0, \infty)$  a konvexná na intervale  $(-\infty, 0)$

**inflexný bod neexistuje, lebo  $y'' \neq 0$**

**Pr. 4 – 47 / 7:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.





$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

### Určenie monotónnosti

$$x \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$[x] = \pm 1, \text{SB} : -1, 1 \quad \wedge \quad x \neq 0, \text{BN} : 0$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$y'$	+	SB	-		-	SB	+
		lok max		BN		lok min	

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} \text{ pre } x > 1 \text{ a } x < -1 \text{ je } + \quad \text{lokálne extrémny: } \text{lok. max: } -1, \text{lok. min: } 1$$

funkcia rastie na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, \infty)$ , klesá na  $(-1, 0)$  a  $(0, 1)$

Dú – 47/ 1, 5, 6, 8, 9,12, 13, 16