

NEURČITÝ INTEGRÁL

$$P: F(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x - 9, \quad f(x) = 12x^2 - 4x + 8$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$G(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x + 2026$$

$$G'(x) = f(x)$$

$$H(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x - 501$$

$$H'(x) = f(x)$$

F je primitivna k f

Def) Funkcia F sa nazýva primitivna funkcia k f na J, ak $\forall x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$

Veta) Nech F je primitivna funkcia k f na interv. J, $c \in \mathbb{R}$, potom aj $(F(x) + c)$ je primitivna k f na J.

$$(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = F'(x) = f(x)$$

teda ak k funkcii existuje primitivna funkcia, tak ich existuje nekonečne veľa.

Veta) Z biedy existuje k funkcii f(x) primitivna funkcia: ak f(x) je spojita na J.

NEURČITÝ INTEGRÁL

Množina $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ vsledujúc primitivných funkcií k funkcii f(x) nazývame neurčitý integrál f(x).

zapis:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \rightarrow \text{integrálna konštanta}$$

symbol integrálu, integrand, diferenciel, primitivna funkcia k f

otázky, úlohy: 1) Z biedy existuje $\int f(x) dx$ (odpoved: ak f je spojita, miera horota: f je integrovateľná, ak f je spojita, $f(x) = 2^x$ je spojita, $f(x) = 2^x$ je spojita)

2) Z biedy je primitivných funkcií k danej funkcii? odpoved: nekonečne veľa (napríklad pri riešení neurčitých integrálov je množina funkcií)

3) Ako nájdeme predpis primitivnej funkcie? (ako vypracujem $\int f(x) dx$?) proces integrovania

$$p. \int 1 dx = x + C$$

$$\text{príklad: } \int x^2 dx = \text{nenájdeme predpis primitivnej funkcie.}$$

kalibro integrály sa riešia numericky/mi metódami (určitý integrál)

4) Z NAO? $\rightarrow$ využijeme **OBROVSKÉ** $\rightarrow$ cez určitý integrál (bude možnosť)

geometrické aplikácie uvedieme: máme priklad: obsah rovinných oblastí $\int f(x) dx$

rozna objemy / povrchy teles... + iné využitia

VÝPOČET NEURČITEHO INTEGRÁLU (proces integrovania)

reka o lineárnosti:

$$\int (a f(x) + b g(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

$$p. \int 2 f(x) dx = 2 \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

INTEGRÁCNE VZORCE !!! (musíme ich vedieť)

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \leftarrow \text{uľožem pleťuši}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+b^2}| + C$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \ln|f(x)| + C \leftarrow \text{uľožem pleťuši}$$

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2+b^2}| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+b^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot (x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) =$$

$$(\ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+b^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+b^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+b^2} + x}{\sqrt{x^2+b^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

teda $\ln|x + \sqrt{x^2+b^2}|$ je primitivna k $\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}$ teda

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+b^2}| + C$$

príklady (využívam iba vzorce a veta o lineárnosti)

$$\textcircled{1} \int (5x^3 - 4x^2 + 6) dx = \int 5x^3 dx - \int 4x^2 dx + \int 6 dx$$

$$= 5 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 6 \int 1 dx = 5 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 6x + C$$

$$= \frac{5}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 6x + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\textcircled{2} \int (7e^x + \frac{1}{4} \sqrt{x^2} - 8 \sin x) dx = \int 7e^x dx + \int \frac{1}{4} \sqrt{x^2} dx - \int 8 \sin x dx =$$

$$= 7e^x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 8 \sin x + C = 7e^x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 8 \sin x + C$$

$$= 7e^x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 8 \sin x + C$$

$$\int \lg x dx$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

$$\operatorname{arctg} x$$

$$\textcircled{3} \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx = \int \left(\frac{2^x}{6^x} + \frac{3^x}{6^x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{2^x}{(\frac{2}{6})^x} + \frac{3^x}{(\frac{3}{6})^x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{3} \right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})^x}{\ln \frac{1}{3}} + \frac{(\frac{1}{2})^x}{\ln \frac{1}{2}} + C$$

SUBSTITUČNÁ METÓDA pre neurčitý integrál.

VETA) Nech $\varphi: (a,b) \rightarrow (c,d)$ je spojita a má spojité

derivácie. Nech $F(t)$ je primitivna funkcia k $f(t)$ na (c,d) . Potom funkcia $F(\varphi(x))$ je primitivna k $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ na (a,b) .

zapis: $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$

mať teda $F(\varphi(x))$ je primitivna k $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

! princíp substitúcie: zjednodušenie predpisu integrovanej funkcie!

príklady:

$$\text{vzorec: } \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\text{príklad: } \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = t \\ \text{derivujem} \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$\textcircled{2} \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \text{derivujem} \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\text{vzorec: } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} dx = \left(\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C \right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ \frac{x}{a} = t \\ \text{derivujem} \\ \frac{1}{a} dx = dt \\ dx = a dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{t^2 + 1} a dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x^x}{4 + e^x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ 4 + e^x = t \\ \text{derivujem} \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|4 + e^x| + C = \ln(4 + e^x) + C$$

$$\textcircled{5} \int \lg x dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\textcircled{6} \int \operatorname{arctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$