APROXIMÁCIA FUNKCIÍ

↓

NAHRADENIE

$f(x)$:

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

$f(x_i) = y_i$

$f(x)$ - funkcia daná $n+1$ uzlovými bodmi

funkciu $f(x)$ chceme aproximovať funkciou $g(x)$, ktorej predpis budeme vedieť určiť

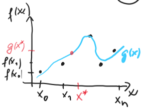
$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x)$$

c_i - konštanty $i = 0, \dots, n$

$g_i(x)$ - zvyčajne sa jedná o elementárne funkcie $(1, x, x^2, \dots, \sin x, \dots, e^x \dots)$

Chceme určiť koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_n$ pomocou vhodných kritérií

2 postupy: ① Langrangeov interpolačný polynóm
② Metóda najmenších štvorcov



$x^* \in \langle x_0, x_n \rangle$

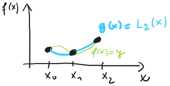
VYUŽITIE:
chceme poznať približnú funkčnú hodnotu v bode x^*, ktorý nie je uzlovým bodom

$f(x^*) \approx g(x^*)$
↑
aproximácia

POSTUP: vytvoríme aproximáciu (získame funkciu $g(x)$) a dosadíme x^* za x

① Interpolačná aproximácia (Lagrangeov interpolačný polynóm)

Funkciu f danú $n+1$ uzlovými bodmi chceme nahradiť polynómom stupňa n, pričom funkčné hodnoty polynómu MUSIA byť v uzlových bodoch rovnaké ako hodnoty aproximovanej funkcie.



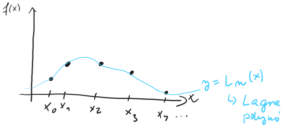
$f(x_i) = g(x_i)$
↙ dané tabuľkou
↘ chceme nájsť (tu: polynóm)

n=2

x_i	x_0 …	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_n)$

Funkcia f je zadaná tabuľkou (bez predpisu).
(napr. cieľom je určiť hodnotu funkcie v inom ako uzlovom bodu)

Funkcia je zadaná predpisom
(napr. pri výpočte určitého integrálu z funkcie, ku ktorej nepoznáme primitívnu funkciu)



↳ Lagrangeov interpolačný polynóm stupňa n

Chceme nahradiť funkciu f polynómom stupňa n takým, aby jeho hodnoty v uzlových bodoch sa zhodovali s funkčnými hodnotami funkcie f

t.j. $\boxed{f(x_i) = L_m(x_i)}$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$

? $L_m(x_i)$?

$$L_m(x) = p_0(x) \cdot f(x_0) + p_1(x) \cdot f(x_1) + \dots + p_n(x) \cdot f(x_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{p_i(x)}_{\text{polynómy}} \cdot \underbrace{f(x_i)}_{\text{konštanta}}$$

TEDA: polynómy $p_i(x)$ volíme tak, aby platilo

$$p_i(x_i) = 1 \quad \& \quad p_i(x_j) = 0 \quad (j \neq i)$$

Teda

$$p_i(x) = \boxed{c_i}\,(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

konštanta už platí: $p_i(x_j) = 0$

$c_i = ?$

$$p_i(x_i) = \underline{1 = c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$c_i = \frac{1}{\underbrace{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}_{\text{číslo}}}$$

Dostávame

n zátvoriek

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

polynóm stupňa n

Rozpíšeme to pre $n = 2$

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot f(x_1) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot f(x_2)$$

PRÍKLAD Majme dané hodnoty funkcie $f(x)$ v tabuľke

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	3	1	3
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Aproximujme funkciu $f(x)$ Lagrangeovým interpolačným polynómom. Vypočítajme približnú hodnotu funkcie $f(x)$ v bode $x = 0{,}5$ pomocou $L_m(x)$.

$n=2$

$$f(x) \approx L_2(x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)}\cdot 3 + \frac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)}\cdot 1 + \frac{(x+1)(x-1)}{(3+1)(3-1)}\cdot 3$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{-2\cdot(-4)}\cdot 3 + \frac{x^2-2x-3}{2\cdot(-2)}\cdot 1 + \frac{x^2-1}{4\cdot 2}\cdot 3 =$$

$$= \frac{3}{8}(x^2-4x+3) - \frac{1}{4}(x^2-2x-3) + \frac{3}{8}(x^2-1) =$$

$$= x^2\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) + x\left(-\frac{12}{8}+\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{9}{8}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right) =$$

$$= x^2\left(\frac{3-2+3}{8}\right) + x\left(\frac{-12+4}{8}\right) + \left(\frac{9+6-3}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \approx f(x)$$

$$L_2(0{,}5) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2 - 0{,}5 + \frac{3}{2} = 1{,}125$$

$$\langle -1; 3\rangle \qquad x^* \in \langle -1, 3\rangle \qquad L_2(x^*) \approx f(x^*)$$

PRÍKLAD

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-1	0	2	4
$f(x_i)$	-2	$0{,}5$	$5{,}4$	35
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

$n=3$

$$f(x) \approx L_3(x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\cdot f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\cdot f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\cdot f(x_3)$$

$$= \frac{x(x-2)(x-4)}{-1\cdot(-3)(-5)}\cdot(-2) + \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{1\cdot(-2)(-4)}\cdot 0{,}5 + \frac{(x+1)x(x-4)}{3\cdot 2\,(-2)}\cdot 5{,}4 +$$

$$+ \frac{(x+1)x(x-2)}{\cancel{5}\cdot 4\cdot 2}\cdot \overset{7}{\cancel{35}} = \frac{2}{15}x(x^2-6x+8) + \frac{0{,}5}{8}(x+1)(x^2-6x+8) -$$

$$- \frac{5{,}4}{12}x(x^2-3x-4) + \frac{7}{8}x(x^2-x-2) = \frac{2}{15}(x^3-6x^2+8x) +$$

$$+ \frac{0{,}5}{8}\left(x^3 - 5x^2 + 2x + 8\right) - \frac{5{,}4}{12}\left(x^3 - 3x^2 - 4x\right) + \frac{7}{8}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)$$

$$= x^3\left(\frac{2}{15} + \frac{0{,}5}{8} - \frac{5{,}4}{12} + \frac{7}{8}\right) + x^2\left(-\frac{2\cdot 6}{15} - \frac{0{,}5\cdot 5}{8} + \frac{5{,}4\cdot 3}{12} - \frac{7}{8}\right)$$

$$+ x\left(\frac{2\cdot 8}{15} + \frac{0{,}5\cdot 2}{8} + \frac{5{,}4\cdot 4}{12} - \frac{7\cdot 2}{8}\right) + \frac{0{,}5\cdot 8}{8} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}62083\,x^3 - 0{,}6375\,x^2 + 1{,}2417\,x + 0{,}5}} = L_3(x) \approx$$

$$\approx f(x)$$

PRÍKLAD:

x_i	1	2	4
$f(x_i)$	1	4	16

$n = 2$

Chceme určiť približnú hodnotu $\underbrace{f(3{,}1)}$.

$$f(x) \approx L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)}\cdot 1 + \frac{(x-1)(x-4)}{1\cdot(-2)}\cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{3\cdot 2}\cdot 16$$

$$f(3{,}1) \approx L_2(3{,}1) = \frac{(3{,}1-2)(3{,}1-4)}{3} - 2\,(3{,}1-1)(3{,}1-4) + \frac{8}{3}(3{,}1-1)\cdot(3{,}1-2) =$$

$$= \underline{\underline{9{,}61}}$$

Chyba aproximácie funkcie pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu:

Ak $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ sú uzlové body, $x_0, \ldots, x_n \in I$ a funkcia $f(x)$ má deriváciu rádu $(n+1)$,

tak $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_i)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

PRÍKLAD

Poznáme hodnoty funkcie $y = \cos x$ v bodoch $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ $\curvearrowright$

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_i)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = \cos x$

$n = 2$

a) $f\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx L_2\left(\frac{\pi}{5}\right)$

b) odhadnime chybu, ktorej sme sa dopustili

c) vypočítajme presne chybu, ktorej sme sa dopustili

a) $$L_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot 1 + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} +$$

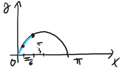
$$+ \frac{\frac{\pi}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{0{,}8098}}$$

b) $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$\underbrace{|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\sin x$ $\quad f''(x) = -\cos x$ $\quad f'''(x) = \sin x$

$$M_3 = \max_{x\in\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle} |\sin x| \leq \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}\left|x\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| \leq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}\left|\frac{\pi}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{\pi^3}{3000} = \underline{\underline{0{,}001218}}$$

c) $$\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = \left|\cos\frac{\pi}{5} - 0{,}8098\right| =$$

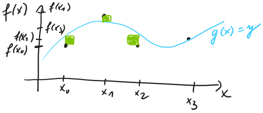
$$= \underline{\underline{0{,}000783}}$$

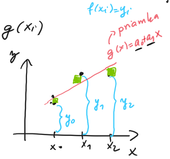
② METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

$$f(x):\quad \begin{array}{c|ccc} x_i & x_0 & \dots & x_n \\ \hline f(x_i) & f(x_0) & & f(x_n) \end{array}$$

$f(x) \approx g(x)$ n+1 uzlových bodov

$g(x)$: NEMUSÍ PLATIŤ $f(x_i) = g(x_i)$





Nech $g(x) = a_0 + a_1 x$
(lineárna funkcia)
$a_0, a_1 = ?$

chceme nájsť koeficienty a_0, a_1 tak, aby súčet 🟩 (štvorcov) bol minimálny

$$\sum_{i=0}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2 \to \min$$

x_i, y_i - čísla

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2}_{=G(a_0, a_1)} \to \min.$$

Minimum nadobúda funkcia $G(a_0, a_1)$ pre hodnoty $\boxed{a_0, a_1}$, že platí: $\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0$ & $\frac{\partial G}{\partial a_1} = 0$

parciálne derivácie

$[☁^2]' = 2☁ \cdot ☁'$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0 \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i + a_1 x_i^2 - y_i x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot x_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot 1$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1\, x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i\, x_i$$

$$\sum_{i=0}^{3} 2 = 2+2+2+2 = 8$$

$$y = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x$$

$$\sum_{i=0}^{2} x_i = 1+2+8 = 11$$

$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 8$

$$f(x) \approx g(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x)$$

$a_0, a_1 = ?$

napr.

$g(x) = a_0 \cdot \frac{1}{x} + a_1 \cdot x^2$

$g(x) = a_0 \cdot e^x + a_1 \cdot \cos y$

$g(x) = a_0 \cdot \log x + a_1 \cdot x^4$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) &= \sum_{i=0}^{n} y_i\, \varphi_0(x_i) \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \end{aligned}}$$

$$f(x) \approx g(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x)$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) + a_2 \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \varphi_0(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + a_2 \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) + a_2 \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i)$$

vypočítame koeficienty a_0, a_1, a_2

$y_i = f(x_i)$

PRÍKLAD. Funkcia $f(x)$ je daná tabuľkou.
MNŠ aproximujme funkciu $f(x)$ funkciou $g(x)$

a) $f(x)$:

x_i	0	0,5	1,1	2
y_i	−1,75	0,53	0,95	1,25

$g(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x$ $\qquad \varphi_0(x) = 1 \qquad \varphi_1(x) = x$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{3} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i = \sum_{i=0}^{3} y_i$$
$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i$$

$$4a_0 + 3{,}6\,a_1 = 0{,}98$$
$$3{,}6\,a_0 + 5{,}46\,a_1 = 3{,}81$$

$$a_0 = -0{,}987$$
$$a_1 = 1{,}3189$$

$\sum_{i=0}^{3} 1 = 1+1+1+1 = 4$

$\sum x_i = 3{,}6$

$\sum y_i = 0{,}98$

$\sum x_i^2 = 0^2 + 0{,}5^2 + 1{,}1^2 + 2^2 = 5{,}46$

$\sum x_i y_i = 0 \cdot (-1{,}75) + 0{,}5 \cdot 0{,}53 + 1{,}1 \cdot 0{,}95 + 2 \cdot 1{,}25$
$= 3{,}81$

$g(x) = -0{,}987 + 1{,}3189 \cdot x$

$f(0{,}7) \approx g(0{,}7) = -0{,}987 + 1{,}3189 \cdot 0{,}7 = \dots$

b) $f(x)$:

x_i	0	0,5	1,1	2
y_i	−1,75	0,53	0,95	1,25

$f(x) \approx g(x) = a_0 \cdot e^x + a_1$ $\qquad \varphi_0(x) = e^x$, $\varphi_1(x) = 1$

$$a_0 \sum e^{x_i} \cdot e^{x_i} + a_1 \sum 1 \cdot e^{x_i} = \sum y_i \cdot e^{x_i}$$
$$a_0 \sum e^{x_i} \cdot 1 + a_1 \sum 1 \cdot 1 = \sum y_i \cdot 1$$

$$67{,}3414\,\underline{a_0} + 13{,}0419\,\underline{a_1} = 11{,}2141$$
$$13{,}0419\,\underline{a_0} + 4 \cdot \underline{a_1} = 0{,}98$$

$\sum e^{x_i} = e^0 + e^{0,5} + e^{1,1} + e^2 = 13{,}0419$

$$a_0 = 0{,}3244$$
$$a_1 = -0{,}8123$$

$g(x) = 0{,}3244\, e^x - 0{,}8123$

c) $f(x)$:

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12
y_i	2,5	1,2	1,12	2,25

$$f(x) \approx a_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi_0(x)} + a_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\varphi_1(x)} + a_2 \cdot \underbrace{x^3}_{\varphi_2(x)} = g(x)$$

$$a_0 \sum \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_i} + a_1 \sum \frac{1}{x_i^2} \cdot \frac{1}{x_i} + a_2 \sum x_i^3 \cdot \frac{1}{x_i} = \sum y_i \cdot \frac{1}{x_i}$$
$$a_0 \sum \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_i^2} + a_1 \sum \frac{1}{x_i^2} \cdot \frac{1}{x_i^2} + a_2 \sum x_i^3 \cdot \frac{1}{x_i^2} = \sum y_i \cdot \frac{1}{x_i^2}$$
$$a_0 \sum \frac{1}{x_i} \cdot x_i^3 + a_1 \sum \frac{1}{x_i^2} \cdot x_i^3 + a_2 \sum x_i^3 \cdot x_i^3 = \sum y_i \cdot x_i^3$$

$$a_0 \sum \frac{1}{x_i^2} + a_1 \cdot \sum \frac{1}{x_i^3} + a_2 \cdot \sum x_i^2 = \sum \frac{y_i}{x_i}$$
$$a_0 \sum \frac{1}{x_i^3} + a_1 \cdot \sum \frac{1}{x_i^4} + a_2 \sum x_i = \sum \frac{y_i}{x_i^2}$$
$$a_0 \cdot \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^6 = \sum y_i x_i^3$$

$\sum x_i = 7{,}8$

$\sum x_i^2 = 18{,}252$

$\sum x_i^6 = 1101{,}226$

$\sum \frac{y_i}{x_i} = 5{,}1741$

$$2{,}13402\,a_0 + 2{,}48195 \cdot a_1 + 18{,}252\,a_2 = 5{,}1741$$
$$2{,}48195\,a_0 + 2{,}91156\,a_1 + 7{,}8\,a_2 = 5{,}0379$$

$\sum \frac{1}{x_i^2} = 2{,}13402$

$\sum \frac{1}{x_i^3} = 2{,}48195$

$18,252\,a_0 + 7,8\,a_1 + 1101,226\,a_2 = 88,4316$

$\sum \frac{1}{x_i^4} = 2,9156$

$\sum \frac{y_i}{x_i^2} = 5,0379$

$\sum y_i x_i^3 = 88,4316$

$a_0 =$

$a_1 =$

$a_2 =$

DOMÁCA ÚLOHA

① Funkciu $f(x)$ danú tabuľkou

x_i	-3	-1	0	4
$f(x_i)$	3	5	-4	-10

aproximujte Lagrangeovým interpolačným polynómom a určte približnú hodnotu $f(2)$.

② Funkciu $f(x)$:

x_i	-2	-1	1	3	6
$f(x_i)$	$8,1$	$5,5$	$3,5$	$0,5$	-8

metódou najmenších štvorcov aproximujte funkciou $g(x): y = ax + bx^2$.

③ Funkciu $f(x)$:

x_i	0	$0,5$	$1,1$	2
$f(x_i)$	$-1,75$	$0,53$	$0,25$	$1,25$

metódou najm. štvorcov aproximujte funkciou $g(x): y = a + b \sin x$