MAT II

- obsah ✓ neurčitý a určitý integrál, funkcia dvoch premenných
- podmienky na získanie KZ:
- ✓ literatúra → prednášky (prezentácie + tabule)

  web KMTI, predmet MAT II

  + zbierka (web KMTI).

2 zápočtové previerky

- 7. týždeň semestra
  (45 b)
  30 + 15
- 20.5.2026
  2. zápoč. previerky
  (55 b)
  40 + 15

POLYNÓMY

? čo je to polynóm ?

$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x$

$P_3(x) = x^3 + 16$

⋮

$\boxed{x^2 + 2x + 1} = P_2(x)$

Def. Nech $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Výraz $$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

nazývame polynóm v premennej x.

$a_0, \dots, a_n$ … koeficienty polynómu.

Ak $a_n \neq 0$, tak n je stupeň polynómu. Zapisujeme

$$\boxed{\mathrm{st}\, P_n(x) = n}$$

Základné vlastnosti polynómov:

ROVNOSŤ POLYNÓMOV

máme 2 polynómy
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \dots + b_0.$$

Polynómy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sa rovnajú ak $n = m$
a $a_i = b_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.

DELENIE POLYNÓMOV:

Nech sú dané 2 polynómy $P_n(x)$, $Q_m(x)$, $n \geq m$.
Potom existujú jednoznačne určené polynómy $S(x), R(x)$,
také, že
$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot S(x) + R(x)$$
resp. $$\boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

delím polynóm $P_n(x)$
polynómom $Q_m(x)$ (za predpokladu $n \geq m$)

$R(x)$ je zvyšok po delení → buď $R(x) = 0$
↓
alebo $\mathrm{st}\, R(x) < m$

príklad: $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$Q_2(x) = x^2 - 3x + 2$

? $Q_2(x) : P_3(x)$? → nie

$\boxed{P_3(x)} : Q_2(x)$ ÁNO

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1$$
$$\underline{-(x^3 - 3x^2 + 2x)}$$
$$x^2 - x - 1$$
$$\underline{-(x^2 - 3x + 2)}$$

zvyšok: $2x - 3$ koniec delenia

$x^3 : x^2 = x$

$x^2 : x^2 = 1$

$2x : x^2 =$ nedá sa

zapíšem:
$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \overset{S(x)}{x + 1} + \frac{\overset{R(x)}{2x - 3}}{x^2 - 3x + 2}$$

pr. $(\boxed{x^3}-1) : (\boxed{x}-1) = x^2+x+1$

$-(x^3-x^2)$

$\boxed{x^2}-1$

$-(x^2-x)$

$\boxed{x}-1$

$x-1$

zvyšok 0

$x^3 : x = x^2$

$x^2 : x = x$

$x : x = 1$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$$

$$\boxed{x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)}$$

polynóm delí x^3-1

vzorec:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

vzorec: $a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$

úloha:

$$P_7(x) = 4x^7+3x^3+8x^2-6$$

vypočítajme hodnotu polynómu v čísle:

v čísle 0 $\quad P_7(0) = -6$

$P_7(-3) = 4.(-3)^7+3.(-3)^3+8.(-3)^2-6 =$

$= \dots$

presne na to je HORNEROVA SCHÉMA

HORNEROVA SCHÉMA

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Úloha: $P_n(\alpha) = ?$

$$P_n(x) = \underline{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n} =$$

$$= a_0 + x(a_1 + \underbrace{x a_2 + \dots + x^{n-1} . a_n}) =$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x a_3 + \dots + x^{n-2} a_n))$$

$= \dots$

$$P_n(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \dots \alpha a_n)\dots))$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}		a_1	a_0
α		$b_n.\alpha$	$b_{n-1}.\alpha$	$b_{n-2}.\alpha$		$\alpha.b_2$	$\alpha.b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}			b_1	b_0

← koeficienty polynómu $P_n(x)$

← nový polynóm

$b_n = a_n$

$\boxed{b_{n-1}} = a_{n-1} + \alpha . b_n = a_{n-1} + \alpha a_n$

$b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha . b_{n-1} = a_{n-2} + \alpha . (a_{n-1} + \alpha a_n)$

$\vdots$

$b_1 = a_1 + \alpha b_2 = a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \dots + \alpha a_n)\dots)$

$b_0 = a_0 + \alpha b_1 = \boxed{a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \dots + \alpha a_n)\dots)} = P_n(\alpha)$

číslo b_0 v HORNEROVEJ SCHEME vyjadruje $\underline{P_n(\alpha)}$.

príklady: 1) $P_4(x) = -x^4+2x^2-7x+4$

$P_4(2) = ?$

	-1	0	2	-7	4
2		-2	-4	-4	-22
	-1	-2	-2	-11	-18

$-18 = P_4(2)$

2) $P_3(x) = x^3-2x^2-2x-3$, $P_3(3) = ?$

	1	-2	-2	-3
3		3	3	3
	1	1	1	$\boxed{0 = P_3(3)}$

3 je koreň polynómu $P_3(x)$

Def Číslo α, pre ktoré platí $P_n(\alpha)=0$ nazývame koreň polynómu $P_n(x)$.
(resp. koreň algebraickej rovnice $\underline{P_n(x)=0}$)

pokračujeme v príklade:

$$(x^3-2x^2-2x-3) : \underbrace{(x-3)}_{(x-\text{koreň})} = x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}&-(x^3-3x^2)\\ &\quad x^2-2x-3\\ &\quad -(x^2-3x)\\ &\qquad x-3\\ &\qquad -(x-3)\end{aligned}$$

zvyšok 0

$x^3 : x = x^2$

$x^2 : x = x$

$x : x = 1$

$$P_3(x) = \boxed{x^3-2x^2-2x-3 = (x-3)\cdot(\overset{1}{x^2}+\overset{1}{x}+\overset{1}{1})}$$

resp. $(x-3)$ delí polynóm $P_3(x)$ (bezo zvyšku).

VETA Ak α je koreň polynómu $P_n(x)$, (teda $P_n(\alpha)=0$) potom $(x-\alpha)$ delí $P_n(x)$.

teda: $P_n(x) = (x-\alpha)\cdot Q_{n-1}(x)$.

pokračovanie príkladu:

$$P_3(x) = \underbrace{x^3-2x^2-2x-3}_{} = (x-3)(x^2+x+1) =$$

vieme, že 3 je koreň

hľadajme ďalšie korene: (chvíľu budeme v $\mathbb{C}$)

$$x^2+x+1=0$$

$$D=1-4=-3$$

$$\boxed{x}_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

teda

$$=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{koreň}}}{(x-3)}\left(x-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{koreň}}}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}\right)\cdot\left(x-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{koreň}}}{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\right)$$

$$\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$$

ROZKLAD na súčin koreňových činiteľov v $\mathbb{C}$.

platí: v $\mathbb{C}$ polynóm n-tého stupňa má práve n koreňov.

komplex. číslach

poznámka: $P_3(x)$ … 3 korene

$P_{10}(x)$ 10 koreňov

pojem: Násobný koreň:
Koreň α polynómu $P_n(x)$ nazývame k-násobný koreň polynómu, ak platí $(x-\alpha)^k$ delí $P_n(x)$.

príklad: $P_2(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

−1 je dvojnásobný koreň

koniec chvíľky: vraciame sa do reálnych čísel (teda komplexné korene nás nezaujímajú).

teda príklad:

$$\boxed{x^3-2x^2-2x-3=(x-3)\cdot\boxed{(x^2+x+1)}}$$

nemá reálne korene

len 1 reálny koreň 3

rozklad daného polynómu $P_3(x)$ na súčin koreň. činiteľov v $\mathbb{R}$.

príklady: $P_3(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot(x-\gamma)$ (3 reálne korene rôzne)

$P_3(x)=(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)$ (α dvojnás. koreň, + β jednoduchý koreň)

$P_3(x)=(x-\alpha)^3$ α trojnás. koreň

$P_3(x)=(x-\alpha)(\underbrace{x^2+px+q}_{\text{nemá reálne}})$ $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{p^2-4q<0}$$

korene

polynóm 3. stupňa má vždy reálny koreň

$$P_4(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

4 rôzne reálne korene

$$P_4(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)\cdot(x-\gamma)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

2 reálne korene

$$P_4(x) = \underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)}(x^2+px+q) \quad ; \; p^2-4q<0$$

$$P_4(x) = (x^2+p_1x+q_1)\cdot(x^2+p_2x+q_2) \quad ; \; p_i^2-4q_i<0$$

↑

žiadne reálne korene.

polynóm 4. stupňa nemusí mať reálny koreň

Úlohy: rozklad polynómu na súčin koreň. činiteľov na $\mathbb{R}$
(kanonický rozklad)

VETA možné racionálne korene

Nech je daný polynóm $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ s celočíselnými koeficientami $\boxed{a_i \in \mathbb{Z}}$

Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je koreň polynómu $P_n(x)$.
$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

Potom $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$.

príklad: $P_3(x) = \underset{1}{x^3} - \underset{-6}{6x^2} + \underset{11}{11x} - \underset{-6}{6} = 0$ rozklad na súčin koreň. činiteľov.

pomôcka č. 1:
↓ ak je súčet koeficientov $= 0$, potom 1 je koreň!

teda 1 je koreň

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1).(1.x^2 - 5.x + 6) = \_$$

polynóm 2. stupňa

↓ Ako ho určím ?

buď H.S. ↙ alebo predelím s $(x-1)$.

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	$0 = P_3(1)$

použijem napr.

$$= (x-1)\boxed{(x^2-5x+6)} = \boxed{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

potrebujem ešte korene kvadr. rovnice (ak sú reálne)

Vietove vzťahy: 2, 3

$2 . 3 = 6$

$2 + 3 = 5$