

NMPaMŠ – 2.cvičenie

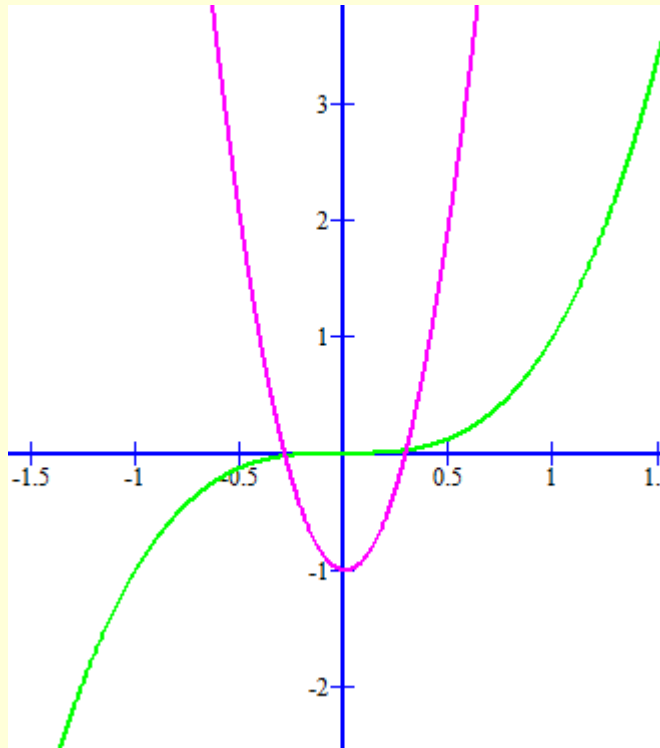
RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

2. Metóda prostej iterácie

Pr. 1: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $f(x) = x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.
Menší kladný koreň určte metódou prostej iterácie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa, overenie $\alpha \in \langle a, b \rangle$



2. Určíme funkciu $x = \varphi(x)$

3. Vypočítame deriváciu $\varphi'(x)$

Poznámka: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ musia byť spojité na intervale $\langle a, b \rangle$

4. Overíme podmienku konvergencie $\varphi'(x)$

$$\text{ak } M = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |\varphi'(x)| < 1$$

$$\text{potom } \lambda = M$$

λ – koeficient kontraktívnosti

5. Na určenie približnej hodnoty koreňa zvolíme iteračný proces a počiatočný bod iterácie z intervalu $\langle a, b \rangle$

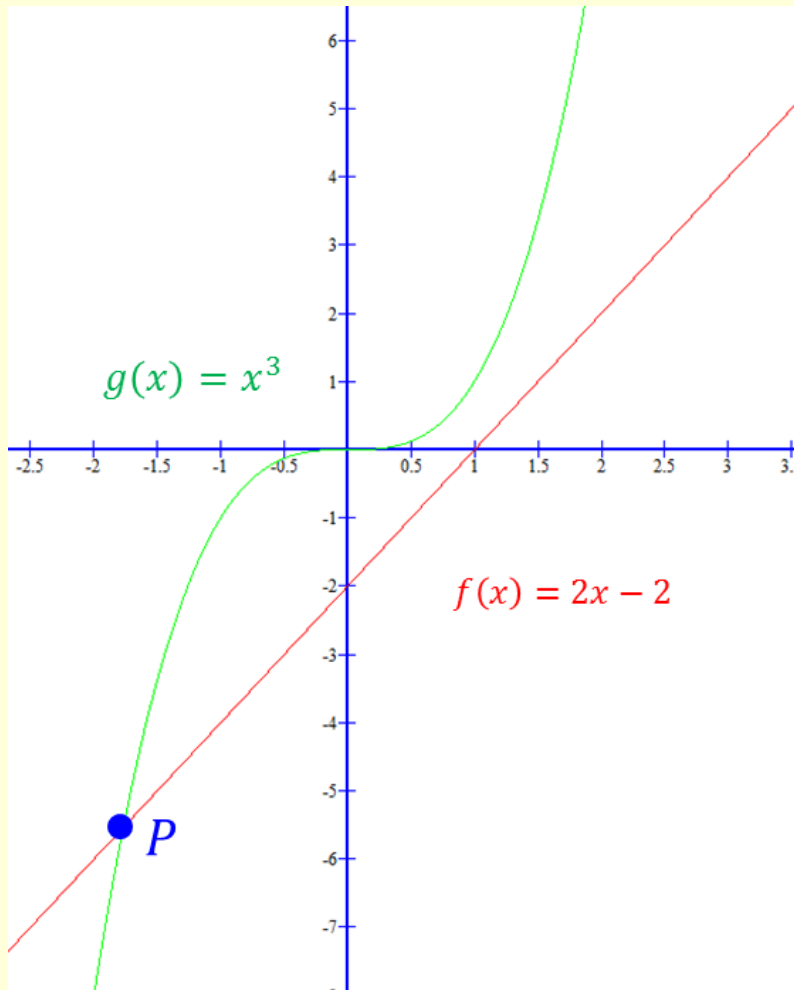
6. Iteračný proces ukončíme, ak je splnená podmienka

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1 - \lambda}{\lambda} \varepsilon$$

n	x_n	$x_{n+1} - x_n$
0		
1		
2		
3		
4		

7. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

Pr. 2: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$.
Koreň rovnice určte metódou prostej iterácie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.



$$x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$x^3 = 2x - 2$$

$$P \in (-2, -1)$$

$$f(-2) = -8 + 4 + 2 = -2$$

$$f(-1) = -1 + 2 + 2 = 3$$

$$f(-1) \cdot f(-2) < 0 \rightarrow \alpha \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt[3]{2x - 2}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3 + 2}{2}$$

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x - 2)^2}}$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{3x^2}{2}$$

$\varphi(x), \varphi'(x)$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}}$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{3x^2}{2}$$

$$M = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |\varphi_1'(x)| = \max_{x \in \langle -2, -1 \rangle} \left| \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}} \right| < 1$$

$$x = -1, \quad \left| \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(-2-2)^2}} \right| = 0,26 < 1$$

$$x = -2, \quad \left| \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(-4-2)^2}} \right| = 0,2 < 1$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt[3]{2x-2} \text{ vyhovuje}$$

$$\lambda = M = 0,26$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1 - 0,26}{0,26} 0,01 = 0,028$$

$$M = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |\varphi_2'(x)| = \max_{x \in \langle -2, -1 \rangle} \left| \frac{3x^2}{2} \right| < 1$$

$$x = -1, \quad \left| \frac{3(-1)^2}{2} \right| = 1,5 > 1$$

$$x = -2, \quad \left| \frac{3(-2)^2}{2} \right| = 6 > 1$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3+2}{2} \text{ nevyhovuje}$$

$$\varphi(x) = x_{n+1} = \sqrt[3]{2x_n - 2}$$

$$x_0 = -2$$

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $
0	-2	0,183
1	-1,817	0,038
2	-1,779	0,007 < 0,028 stop iterácie
3	-1,7713	

$$x_0 = -1,5$$

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $
0	-1,5	0,2
1	-1,71	0,047
2	-1,757	0,01 < 0,028 stop iterácie
3	-1,767	

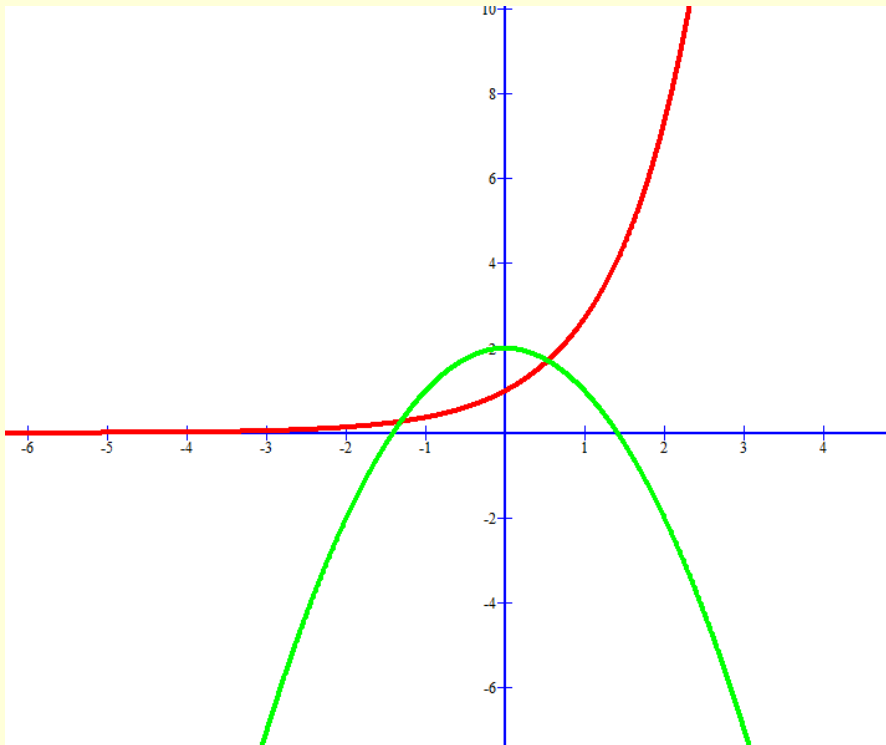
$$\alpha \approx -1,77$$

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

2. Newtonova metóda

Pr. 3: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $e^x + x^2 - 2$. Všetky korene určte pomocou Newtonovej metódy s presnosťou $\varepsilon = 0,001$.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



2. Overíme, či $\alpha \in \langle a, b \rangle$ väčší koreň

$$\alpha \in \langle a, b \rangle, \text{ ak } f(a) \cdot f(b) < 0$$

3. Určime prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$

4. Overíme, či prvá a druhá derivácia funkcie $f(x)$ zachováva na intervale $\langle a, b \rangle$ znamienko

Poznámka: Newtonovu metódu môžeme použiť, ak funkcia $f(x)$ je dvakrát diferencovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a je na danom intervale konvexná alebo konkávna

5. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in \langle a, b \rangle$, pre ktorý má platiť $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

6. Zvolíme iteračný proces $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

7. Určíme podmienku ukončenie - ak platí, že prvá derivácia **nemení** na intervale znamienko, podmienka ukončenia

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$m = \min_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Poznámka: Ak prvá derivácia **mení** na intervale **znamienko**, podmienka ukončenia

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$$

n	x_n	$f(x_n)$ $e^x + x^2 - 2$	$f'(x_n)$ $e^x + 2x$	$\frac{ f(x_n) }{m} < \varepsilon$ $\frac{ f(x_n) }{1} < 0,001$
0				
1				
2				
3				
4				

8. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

Dú: Pr. 3 – dokončiť pre menší koreň

Súbor príkladov na precvičenie na 1. záp. písomku: A / 1-10