

Matematika I, opak. – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

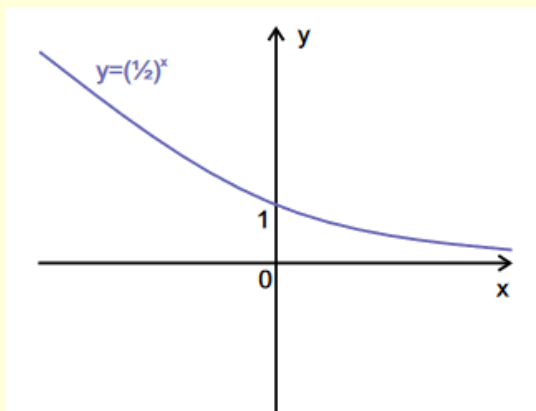
Funkcia $y = \log_a x$, pre $a > 1$ je na celom $D(f)$.

Funkcia na obrázku 1 je

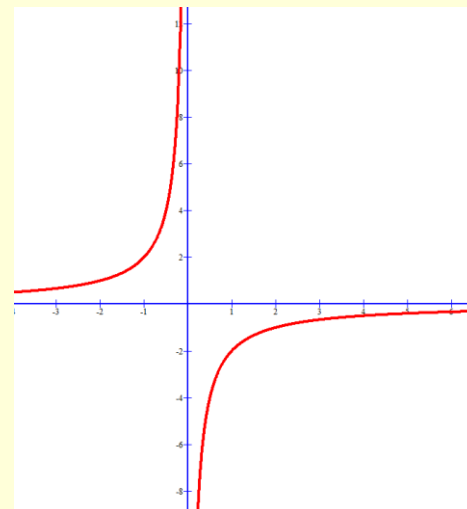
a) mocninová,

b) kvadratická,

→ c) exponenciálna.



Obr. 1



Obr. 2

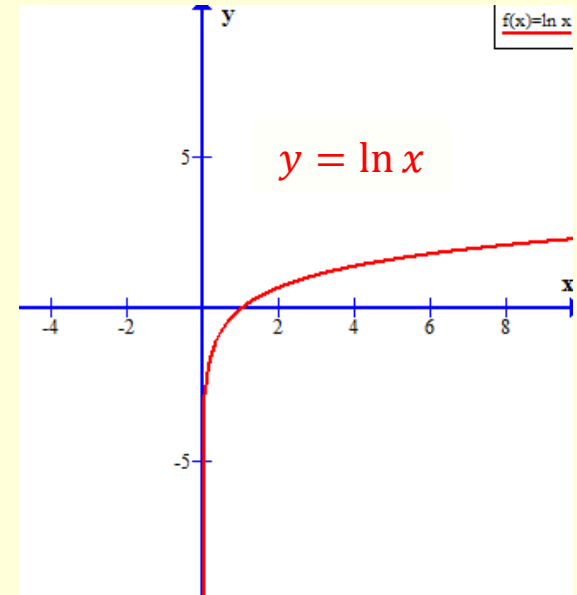
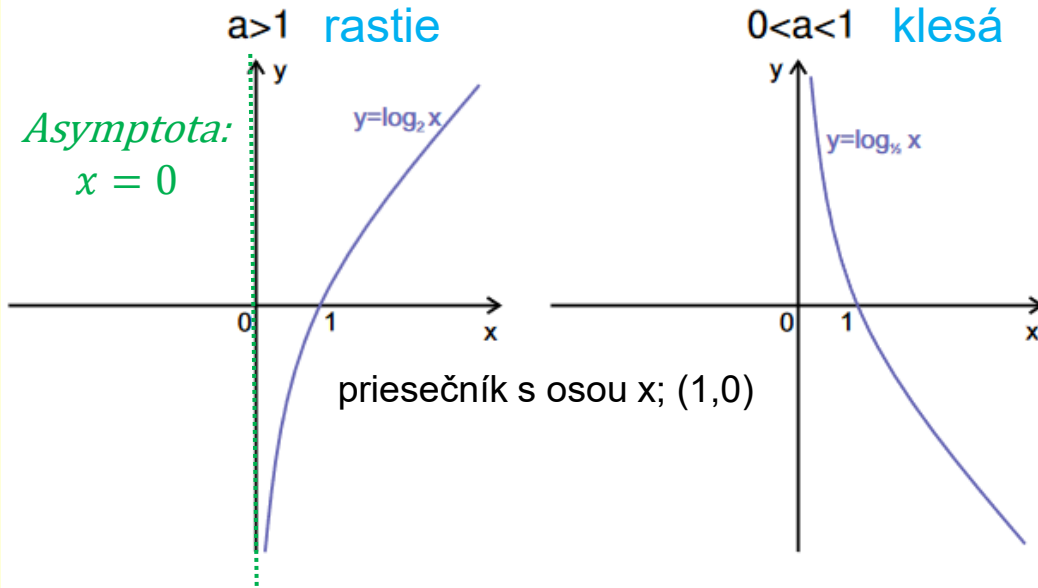
Funkcia f sa nazýva , ak platí 1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(-x) = -f(x)$, pre všetky $x \in D(f)$.

Definičný obor pre funkciu $y = \arcsin x$ je $\langle -1, 1 \rangle$.

Podmienka pre definičný obor pre funkciu na obrázku 2 je $x \neq 0$

Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
 $x > 0$



$y = \log_a(x + b)$
Poloha asymptoty: $x = -b$
Priesečníky s osou x, s osou y

Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = (0, \infty)$$

Postup pri zostrojovaní grafu:

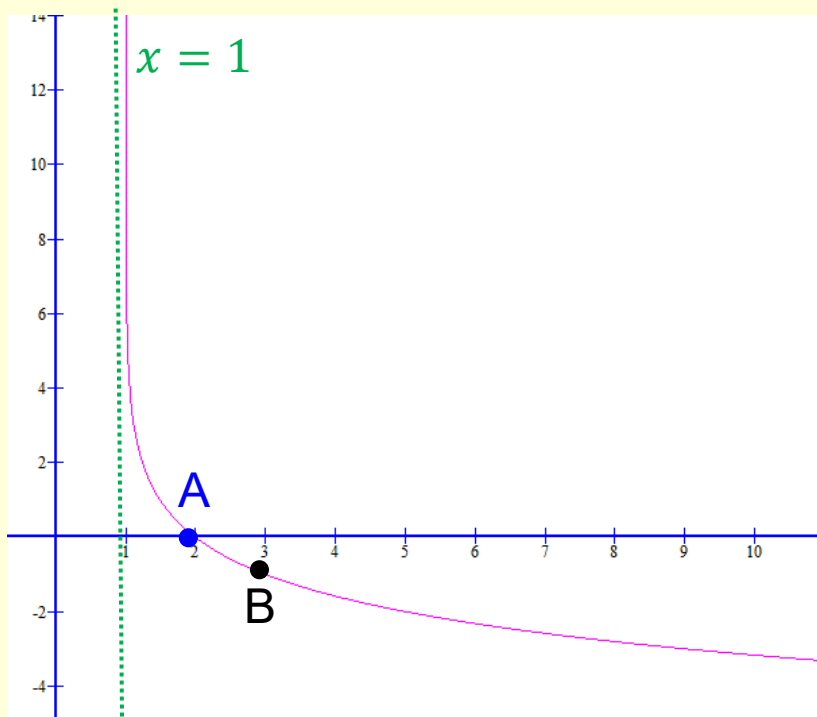
1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y.
4. Viest' zvolenými bodmi krivku.

5. Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá:

a) $y = \log_2(x + 4)$

b) $y = \log_{0,5}(x - 1)$ sami

b) $y = \log_{0,5}(x - 1)$



$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

$$D(f) = (1, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x - 1 = 0$
 $x = 1$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = \log_{0,5}(x - 1)$$

$$0,5^0 = x - 1$$

$$1 = x - 1$$

$$A: x = 2, y = 0$$

priesečník s osou y:

$$x = 0 \notin D(f), \text{ nemá priesečník}$$

voľba bodu:

$$B: x = 3, y = \log_{0,5}(3 - 1) = -1$$

nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

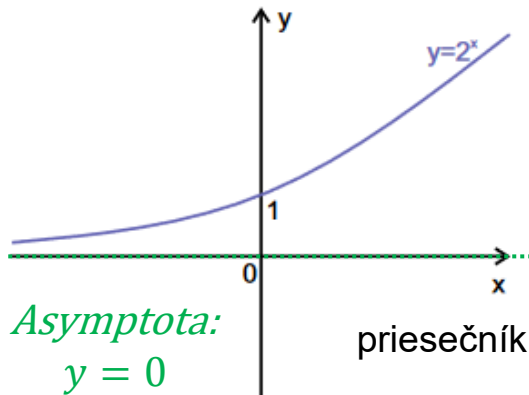
$$x_1 = 2 \neq x_2 = 3 \quad f(x_1) = 0 \neq f(x_2) = -1 \quad \text{je prostá}$$

nie je ohraničená

Elementárne funkcie

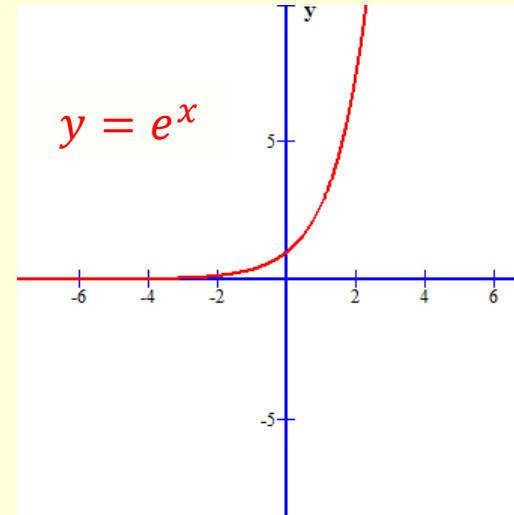
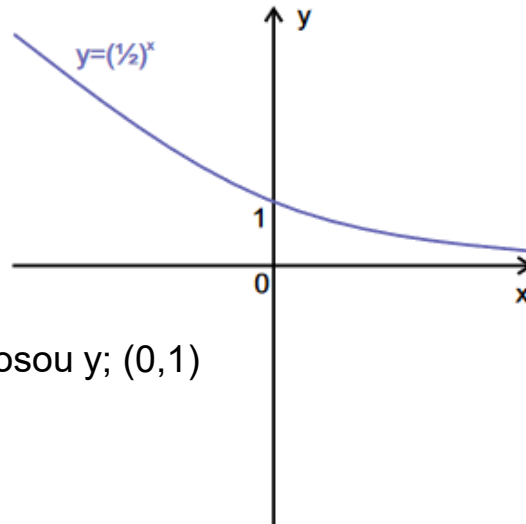
Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$ rastie



priesečník s osou y; (0,1)

$0 < a < 1$ klesá



$$y = a^x + b$$

Poloha asymptoty: $y = b$

Priesečníky s osou x, s osou y

Číslo **a** nazývame základ funkcie.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Postup pri zostrojovaní grafu:

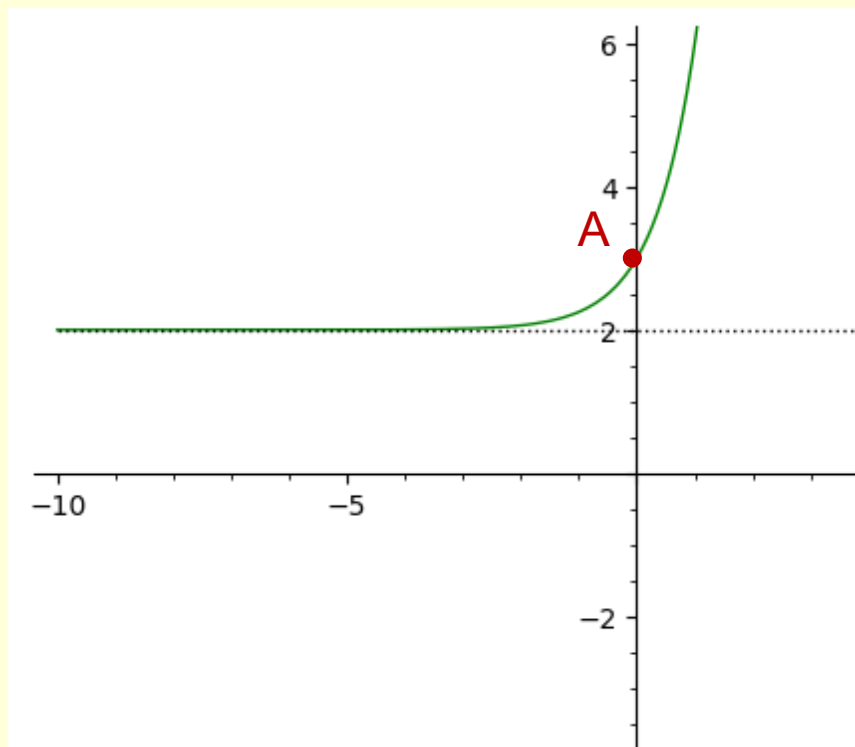
1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y.
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

6. Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá:

a) $y = 0,2^x - 5$

b) $y = 4^x + 2$ sami

b) $y = 4^x + 2$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 4$, rastie

asymptota: $y - 2 = 0$
 $y = 2$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 4^0 + 2$$

$$y = 1 + 2$$

A: $y = 3, x = 0$

priesečník s osou x: nemá
ak $y = 0$, potom rovnica $0 = 4^x + 2$ nemá riešenie

$$H(f) = (2, \infty)$$

nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

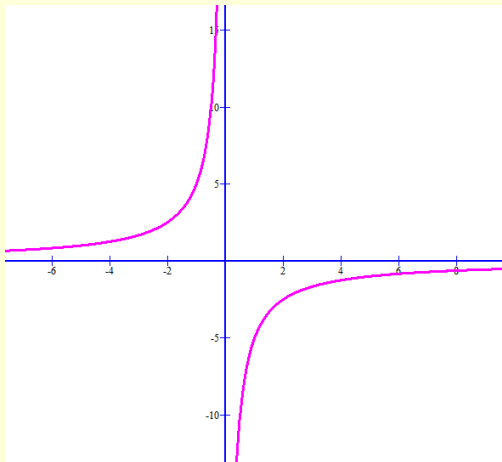
z grafu vidieť, že je prostá

je ohraničená zdola v bode $f(x) = 2$

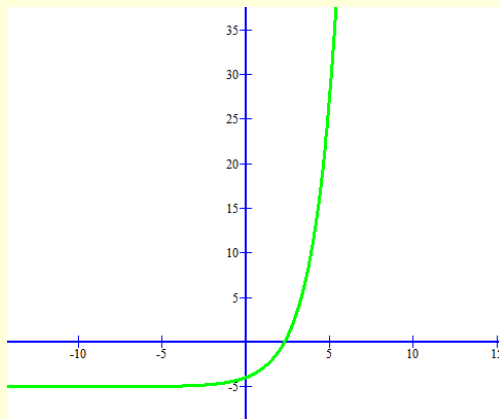
Kontrolka:

1. Vyberte, ktorý zápis funkcie je pre mocninovú funkciu:

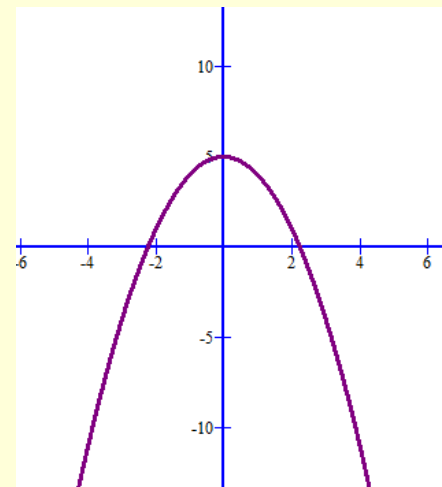
a) $y = -8x + 5$, b) $y = \frac{2}{x}$, c) $y = 3^x$, d) $y = \log_4 x$, e) $y = 2x^5$.



obr. 1



obr. 2



obr. 3

2. Vyberte správne tvrdenia, ktoré platia pre funkcie na obrázkoch 1 - 3:

- a) pre ružovú funkciu je $H(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- b) pre zelenú funkciu je asymptota $y = -5$,
- c) základ zelenej funkcie je $a < 0$,
- d) vrchol fialovej funkcie je $V(0, 5)$,
- e) ružový graf je grafom nepriamej úmernosti,
- f) pre fialovú funkciu je $a > 0$.

Domáca úloha:

Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti ($D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá):

5. c) $y = \log_3 x$

d) $y = \log_{0,5}(x + 2)$

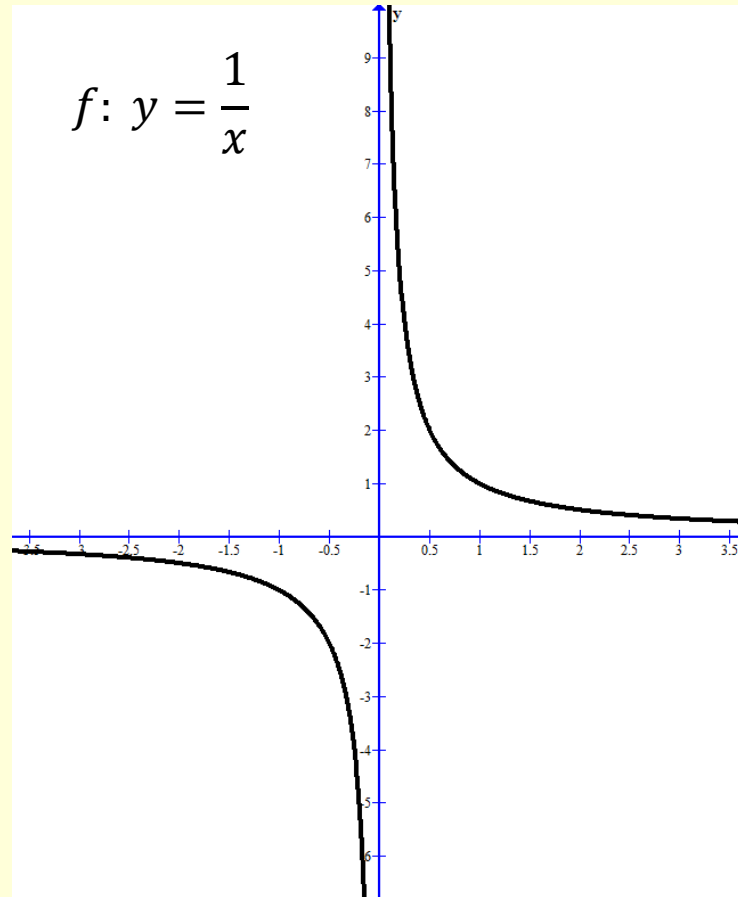
6. c) $y = 2^x - 1$

d) $y = 0,5^x$

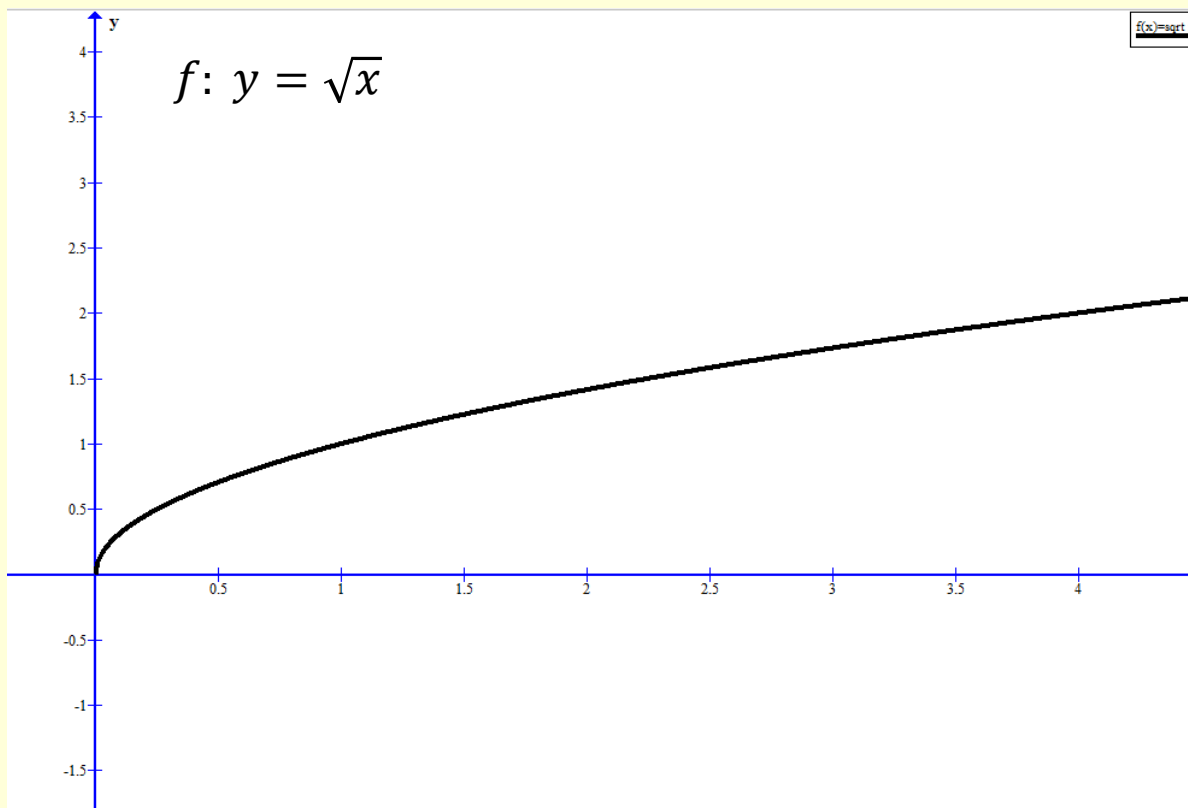
Definičný obor funkcie

Podmienky určovania $D(f)$

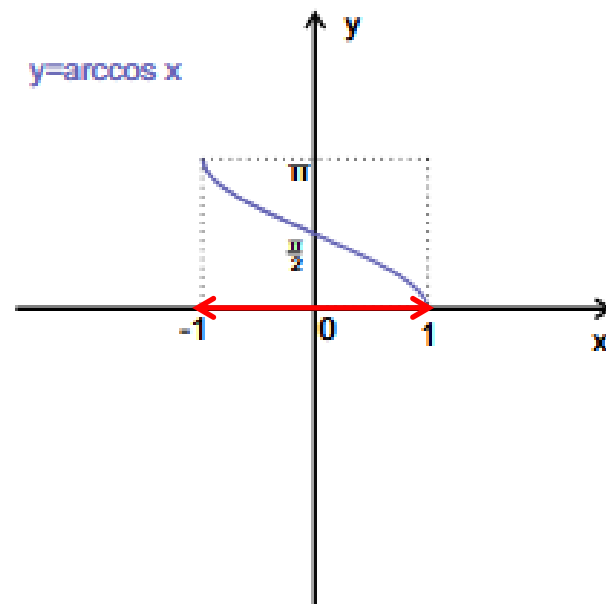
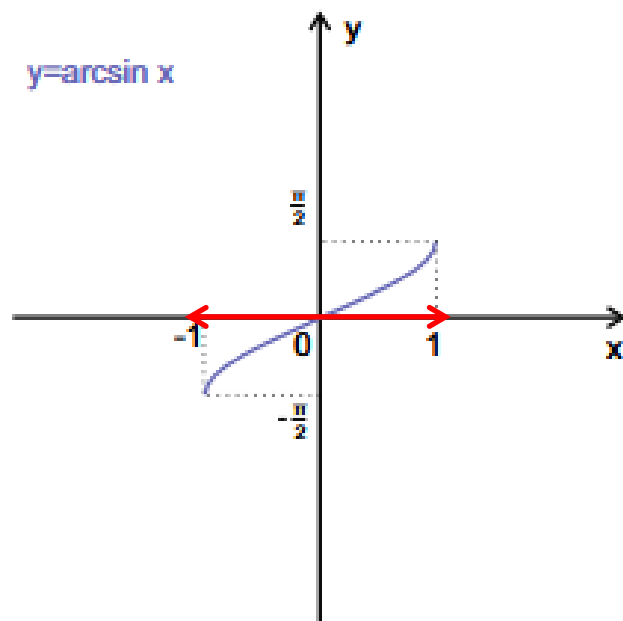
- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$



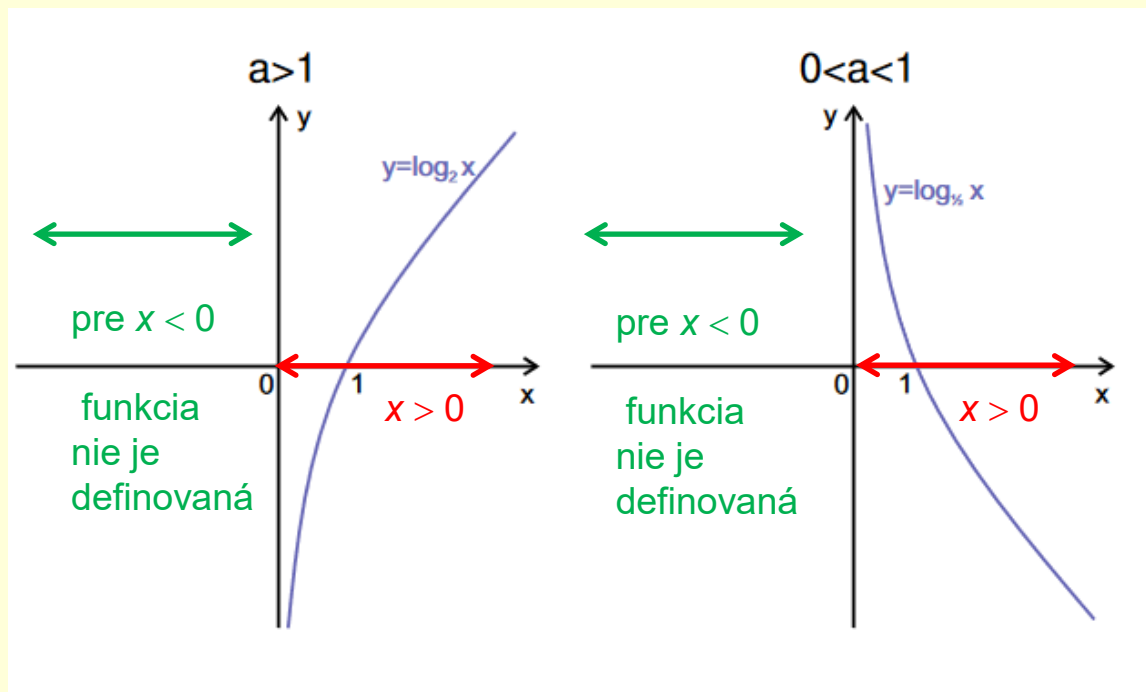
- výraz pod párnou odmocninou musí být nezáporný $\sqrt[n]{x} \rightarrow x \geq 0$



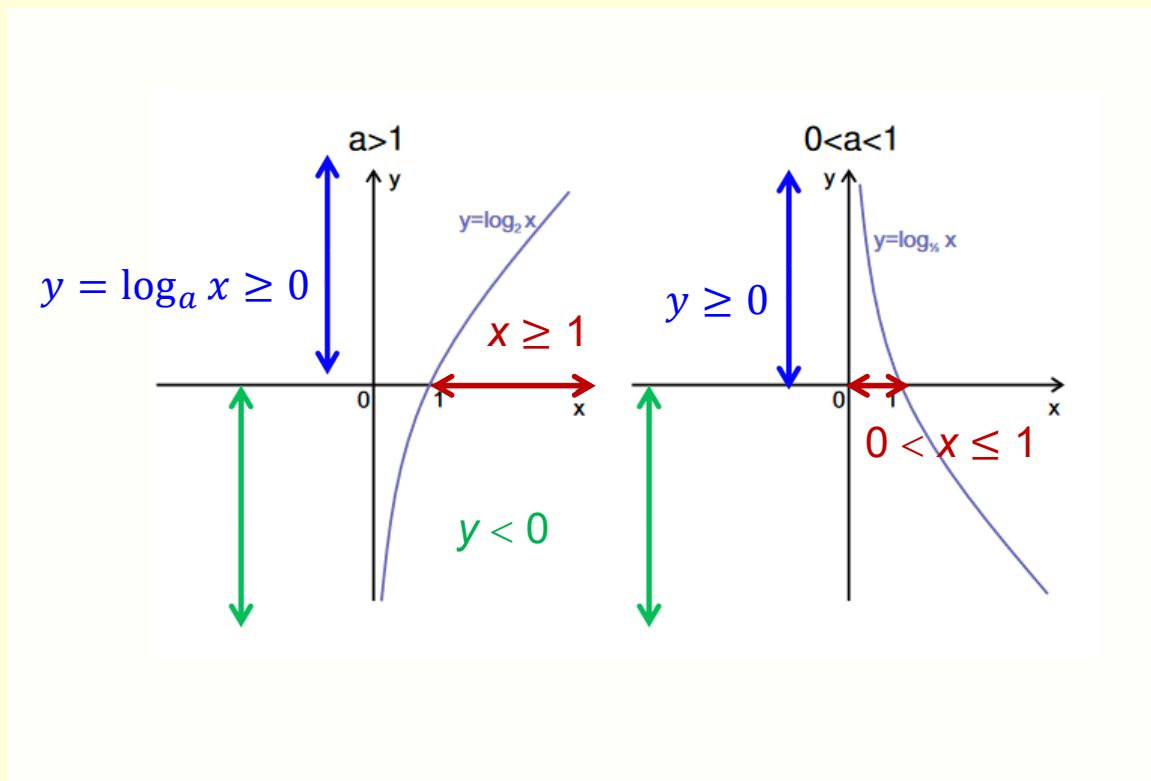
- funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ sú definované pre $-1 \leq x \leq 1$



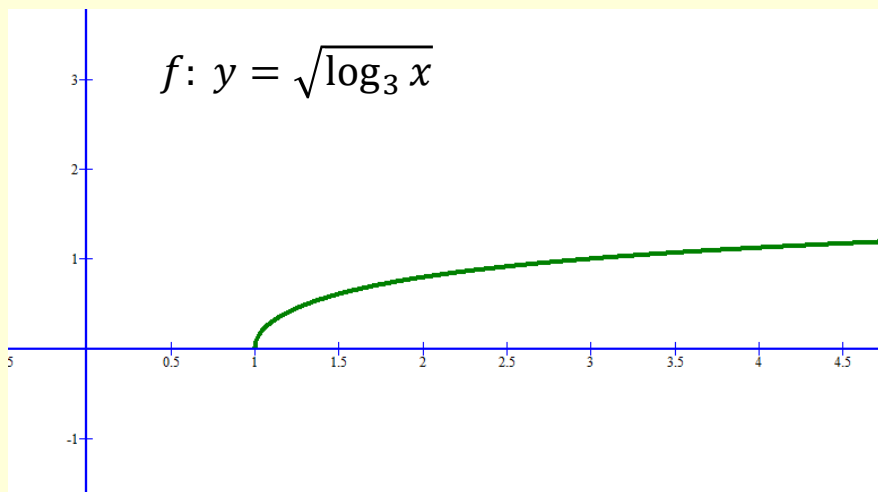
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument $\log_a x \rightarrow x > 0$
 $\ln x \rightarrow x > 0$



$\sqrt[n]{\log_a x} \rightarrow$ ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$
 ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$



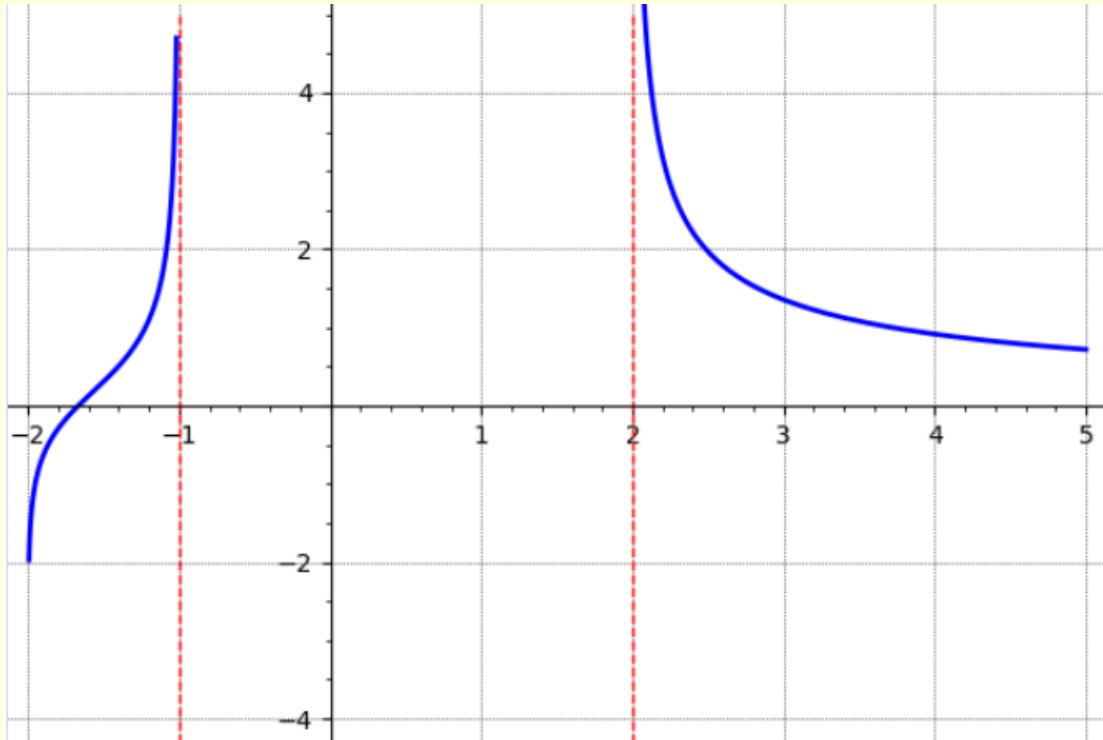
$\sqrt[n]{\log_a x} \rightarrow$ ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$
 ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$



Pr. 1: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \frac{\ln(3x + 6)}{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}$$

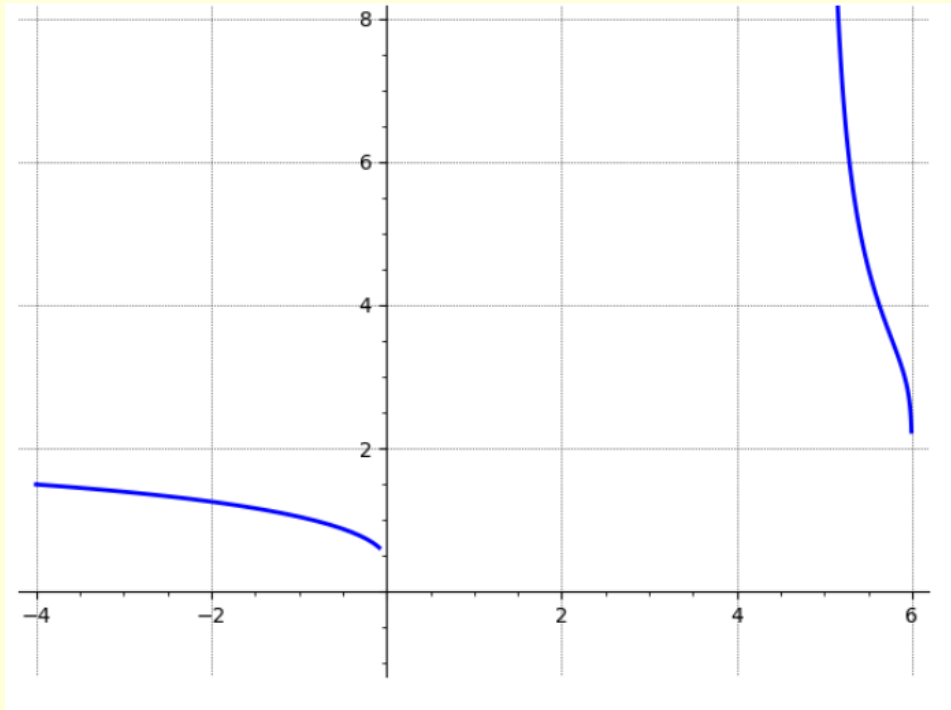
$$D(f) = (-2, 1) \cup (2, \infty)$$



Pr. 2: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{\frac{2x}{x-5}} + \log_8(\sqrt{6-x})$$

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (5, 6)$$



Pr. 3: Určte definičný obor funkcie:

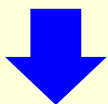
$$f: y = \log_5[(x-1)(x+3)] + \sqrt{\frac{1}{x-3}}$$

$$D(f) = (3, \infty)$$

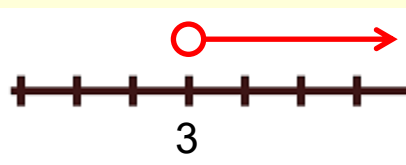
z podmienky pre odmocninu: $\frac{1}{x-3} \geq 0$
z podmienky pre zlomok: $x-3 \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x-3} \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{array} \right\} \frac{1}{x-3} > 0 \rightarrow x-3 > 0$$

z podmienky pre logaritmus: $(x-1)(x+3) > 0$

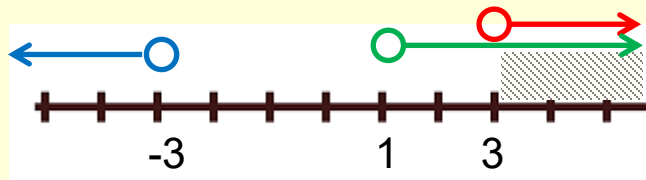


$$x-3 > 0 \wedge (x-1)(x+3) > 0 \rightarrow x > 3$$



$$K_1 = (3, \infty)$$

$$D(f) = K_1 \cap K_2 = (3, \infty)$$

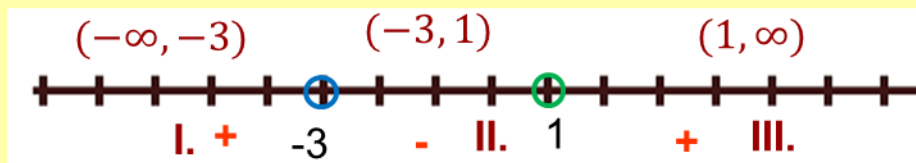


Intervalová metóda:

1. určíme nulové body (NB)

$$x-1=0, x+3=0 \text{ NB: } -3; 1$$

2. rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB

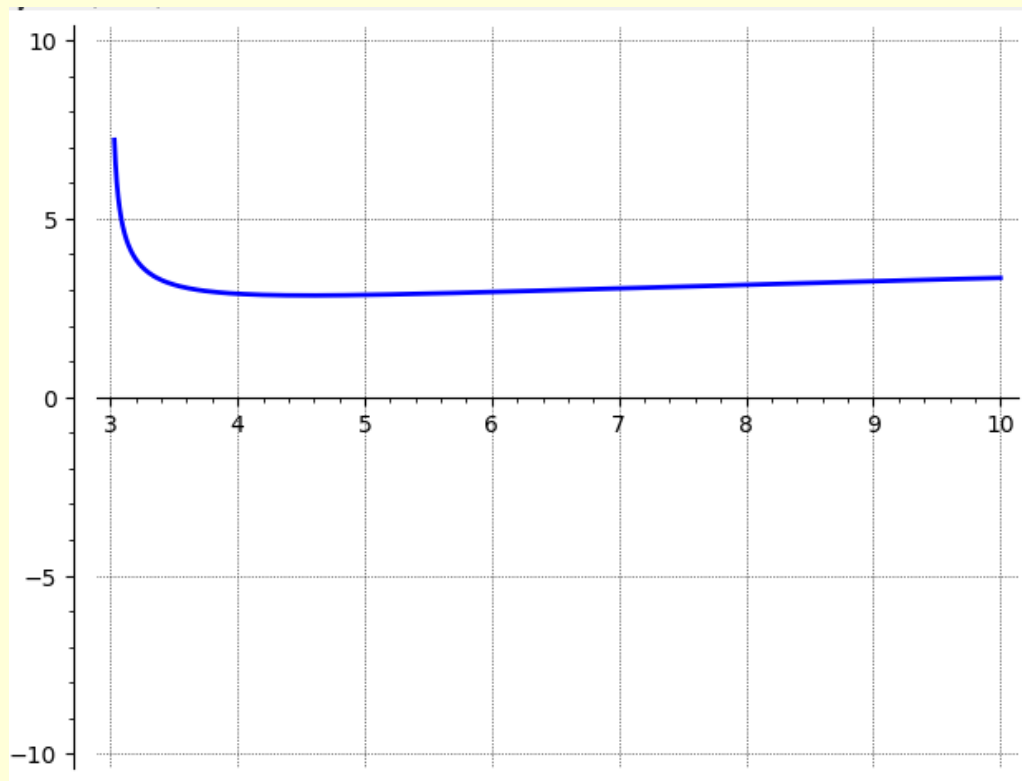


3. na každom intervale určíme znamienko výrazu

$$(x-1)(x+3)$$

výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek > 0 ,
kde je výsledné znamienko +

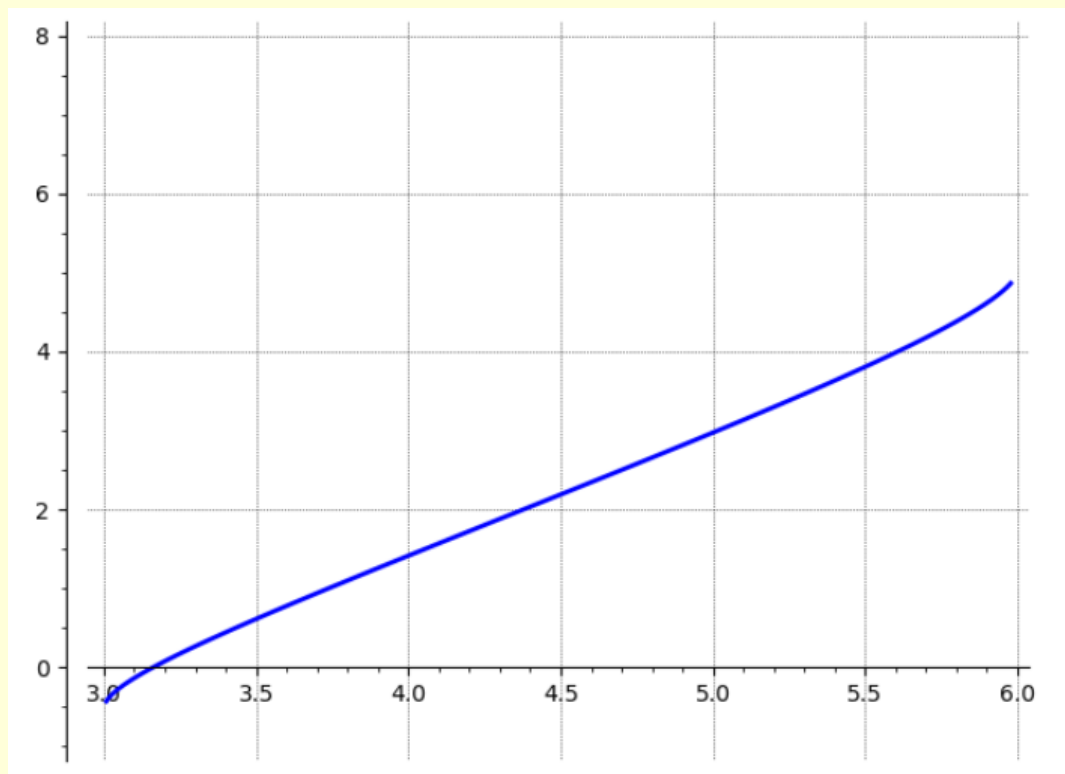
$$K_2 = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$



Pr. 4: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \arcsin \frac{x-4}{2} + \sqrt[7]{x}$$

$$D(f) = \langle 3, 6 \rangle \cup \{2\}$$



1. Malá písomka - riešenie

Skupina A:

1. Určte vlastnosti grafu na obrázku:

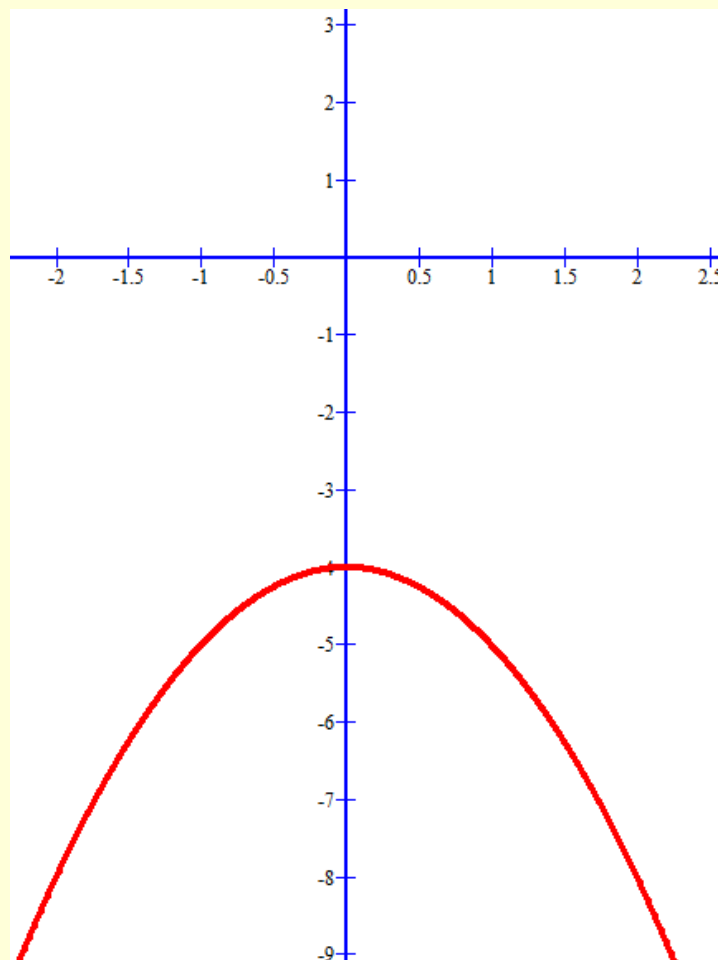
$D(f) = \mathbb{R}$, 0,1b

$H(f) = (-\infty, -4)$, 0,1b

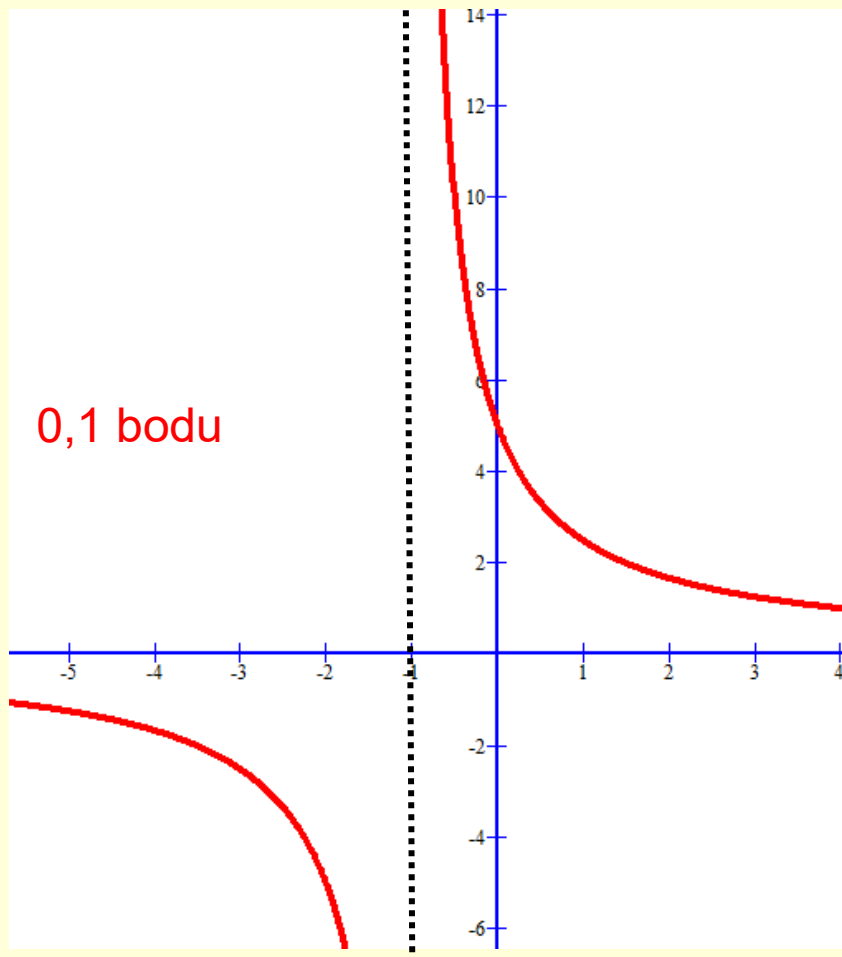
párna, 0,1b

nie je prostá, 0,1b

ohraničená zhora v $f(x) = -4$ 0,1b



2. Načrtnite graf funkcie $y = \frac{5}{x+1}$.



$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \quad 0,1 \text{ bu}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad a = 0, b = 5, c = 1, d = 1$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{1}{1} = -1 \quad 0,2 \text{ b}$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$$

$$A: x = 0, y = \frac{5}{0+1} = 5 \quad 0,1 \text{ b}$$

Skupina B:

1. Načrtnite graf funkcie $y = x^2 - 2x - 3$.

$$D(f) = \mathbb{R} \quad 0,1 \text{ b}$$

vrchol:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = (x - 1)^2 - 3 - 1$$

$$y = (x - 1)^2 - 4$$

$$V(1, -4) \quad 0,1 \text{ b}$$

priesečník s osou y:

$$x = 0$$

$$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$$

$$y = -3 \quad 0,1 \text{ b}$$

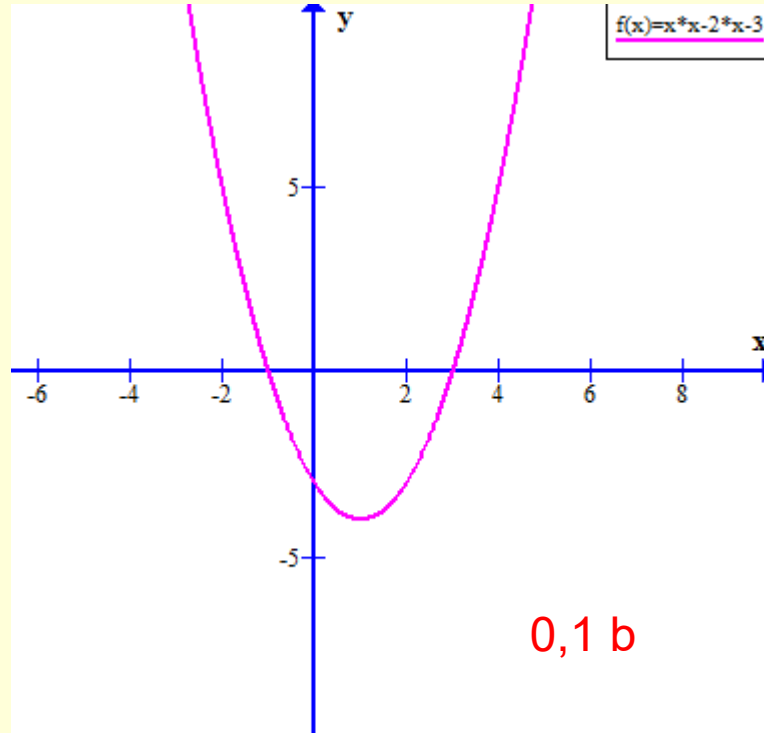
$$x = 0, y = -3$$

priesečníky s osou x:

$$y = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2 \cdot 1} = 3 \quad x_2 = \frac{2-4}{2 \cdot 1} = -1 \quad 0,1 \text{ b}$$



2. Určte vlastnosti grafu na obrázku:

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, 0,1b

$H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, 0,1b

nepárna, 0,1b

je prostá, 0,1b

nie je ohraničená 0,1b

