

Matematika 1 – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Determinant matice

determinant matice A – číslo, ktoré priradíme štvorcovej matici A typu n, označenie: **det A**, resp. **|A|**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant (minor) D_{ij} vzhľadom na prvok a_{ij} matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice A

subdeterminanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Pr. 7: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned} \quad (2 - u, 1 - t, u, t)^T$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2R_1 \\ -2R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} h(A) = 2 \\ h(A') = 2 \end{array}$$

$h(A) = h(A') = 2 < 4$ (počet neznámych) $\Rightarrow$ sústava má ∞ veľa riešení

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_2 - x_4 &= -1 \\ x_4 &= t \quad x_2 = 1 - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 1 - t + x_3 + t &= 3 \\ x_3 &= u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1 - t + u + t &= 3 \\ x_1 &= 2 - u \end{aligned}$$

$$(2 - u, 1 - t, u, t)^T, u, t \in R$$

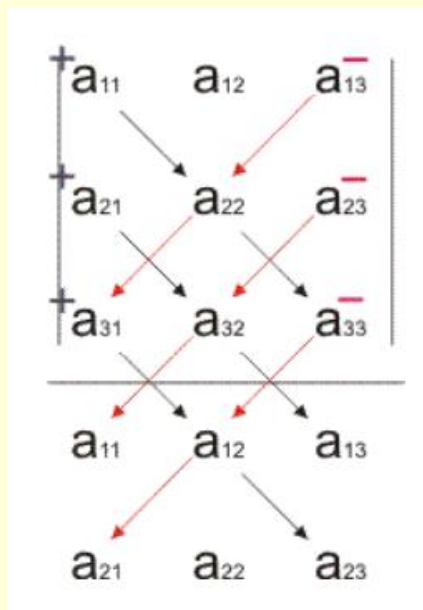
Výpočet determinantu matice

determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22}} - \underline{a_{12} a_{21}}$$

súčin prvkov **na hlavnej diagonále** mínus súčin prvkov **na vedľajšej diagonále**

determinant 3. stupňa - **Sarrusovo pravidlo** - pod tretí riadok v matici podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach



$$= \underline{a_{11} a_{22} a_{33}} + \underline{a_{21} a_{32} a_{13}} + \underline{a_{31} a_{12} a_{23}} - \left(\underline{a_{13} a_{22} a_{31}} + \underline{a_{23} a_{32} a_{11}} + \underline{a_{33} a_{12} a_{21}} \right)$$

determinant n - tého stupňa, $n \geq 4$ – počíta sa pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + \overset{*}{a_{i2}A_{i2}} + \dots + a_{in}A_{in}$$

rozvoj podľa i - tého riadku

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

rozvoj podľa j – tého stĺpca

$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je **algebraický doplnok**

D_{ij} je **subdeterminant prvku a_{ij}** matice A
(vznikne zakrytím i -tého riadku a j - tého stĺpca matice A)



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \textcircled{4} & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{A_{32}}} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$a_{32} = 4$$

$$* \quad a_{32} \cdot A_{32} = a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot D_{32}$$

Postup pri výpočte determinantu n - tého stupňa, $n \geq 4$:

1. Štvorcovú maticu A nahradíme determinantom $|A|$.
2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.
3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

Úpravy v determinante:

- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov (stĺpcov), tak $|B| = -|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vynásobením niektorého riadku (stĺpca) matice A nenulovým číslom r , tak $|B| = r|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A pripočítaním reálneho násobku niektorého riadku (stĺpca) matice A k inému jej riadku (stĺpcu), tak $|B| = |A| \rightarrow$ **ekvivalentná úprava**

Pr. 1 – 63 / 5: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = -8$$

Pr. 2 – 63 / 6: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. maticu nahradíme determinantom

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. pri úprave determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo - pod tretí riadok v determinante podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach (najprv zľava doprava, potom sprava doľava)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 7 \cdot -5) + (2 \cdot 1 \cdot 4) + (3 \cdot 2 \cdot 3) - (3 \cdot 7 \cdot 4) - (1 \cdot 1 \cdot 3) - (2 \cdot 2 \cdot -5)$$

$$|A| = (-35) + (8) + (18) - (84) - (3) - (-20) = -9 + (-67) = -76$$

Pr. 3 – 65 / 21: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Štvorcovú maticu A nahradíme determinantom $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) obsahujúci čo najviac núl.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}D_{21}$$

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

$$\begin{aligned} &= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [(-4) + (36) + (0) - (0 + 12 + (-3))] + \\ &\quad -1[(-2) + 36 + 0] - (0 + 6 + 0) \\ &= 2 \cdot (32 - 9) - 1 \cdot (34 - 6) = 46 - 28 = 18 \end{aligned}$$

Pr. 4 – 64 / 19: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pr. 5: Vypočítajte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1(-1)^{1+2}D_{12} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot [[(1 \cdot -1 \cdot -4) + (-1 \cdot -1 \cdot 4) + (-2 \cdot 5 \cdot -3)] - [(-2 \cdot -1 \cdot 4) + (1 \cdot -1 \cdot 3) + (-1 \cdot 5 \cdot -4)]]$$

$$= -[(4) + (4) + (30) - ((8) + (3) + (20))] = -(38 - 31) = -7$$

Pr. 6 : Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \underset{-S_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot [(2 + 2 + (-2)) - (8 + 1 + (-1))] =$$

$$= -3[2 - (8)] = 18$$

Pr. 7 - str. 63 / 17: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = 1$$

Dú: Str. 64 – 65 / 12-16, 18, 20, 22