

Matematika I. Zobrazenia

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Definícia

Zobrazenie z množiny A do množiny B je binárna relácia $f \subseteq A \times B$ s vlastnosťami:

- a) ku každému $a \in A$ existuje $b \in B$ také, že $(a, b) \in f$,
- b) ak $(a, b) \in f$ a $(a, c) \in f$, tak $b = c$.

- Namiesto slova *zobrazenie* sa v rovnocennom význame často používa slovo *funkcia*.
- To, že f je zobrazenie z množiny A do množiny B , zapisujeme takto: $f : A \rightarrow B$.
- Množinu A nazývame definičný obor a zapisujeme $D(f)$.
- Nech $(a, b) \in f$, potom hovoríme, že
 - prvok a je **vzorom** prvku b .
 - **obrazom** prvku a je prvok b .
- Množinu všetkých obrazov nazývame obor hodnôt a zapisujeme $H(f)$.
- Namiesto afb alebo $(a, b) \in f$ obvykle píšeme $b = f(a)$.

Definícia

Ak $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f_C : C \rightarrow B$, definované predpisom $f_C(x) = f(x)$ pre všetky $x \in C$, nazývame **zúženie zobrazenia** f na množinu C .

Platí: $f_C = f \cap (C \times B)$.

Prázdné zobrazenie a identita

Ak $X = \emptyset$ alebo $Y = \emptyset$, tak $X \times Y = \emptyset$. To znamená, že ak $f \subseteq X \times Y$, tak $f = \emptyset$. V tomto prípade zobrazenie f nazývame **prázdné zobrazenie**.

Definícia

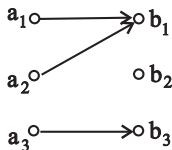
*Nech A je množina. Potom zobrazenie $\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$ na množine A nazývame **identita** na množine A .*

Definícia

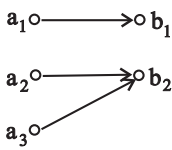
Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

- **surjektívne (na)**, ak ku každému $b \in B$ existuje aspoň jedno $a \in A$ také, že $b = f(a)$.
- **injektívne (prosté)**, ak pre každú dvojicu $a_1, a_2 \in A$ takú, že $a_1 \neq a_2$ platí $f(a_1) \neq f(a_2)$.
- **bijektívne**, ak je surjektívne aj injektívne.

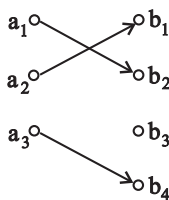
Vlastnosti zobrazení



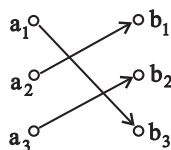
(a)



(b)



(c)



(d)

Zobrazenie na obrázku

- (a) nie je surjektívne ani injektívne,
- (b) je surjektívne, ale nie je injektívne,
- (c) je injektívne, ale nie je surjektívne,
- (d) je surjektívne aj injektívne, teda bijektívne.

Definícia

Majme zobrazenia $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$. **Súčinom (zložením)** zobrazení f a g je zobrazenie $h : A \rightarrow C$ definované predpisom

$$h(a) = g(f(a))$$

pre každé $a \in A$.

- Zobrazenie h budeme označovať $g \circ f$. Platí teda $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pre každý prvok $a \in A$.
- Pre súčin zobrazení platí asociatívny zákon, ale komutatívny nie. Ak má $f \circ g$ zmysel, potom $g \circ f$ vôbec nemusí byť definované.

Pre zobrazenia $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ platí:

- Ak f aj g sú injekcie, tak aj $g \circ f$ je injekcia.
- Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $g \circ f$ je surjekcia.
- Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $g \circ f$ je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

Každé zobrazenie f je binárna relácia z A do B , preto existuje aj binárna relácia f^{-1} z B do A , ktorá vo všeobecnosti nie je zobrazením (funkciou).

Definícia

Nech $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie. Ak existuje zobrazenie $g : B \rightarrow A$ také, že:

① $g \circ f = id_A,$

② $f \circ g = id_B,$

tak hovoríme, že g je inverzné zobrazenie k zobrazeniu f a označujeme ho f^{-1} .

Definícia inverzného zobrazenia hovorí, že:

① $(\forall a \in A) : g(f(a)) = a$

② $(\forall b \in B) : f(g(b)) = b.$

Veta

Nech f je zobrazenie z A do B . Potom f^{-1} je zobrazenie z B do A práve vtedy, ak f je bijektívne zobrazenie.

Veta

Nech $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia a $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Potom platí:

- 1 $g \circ f(A) = g(f(A));$
- 2 $(g \circ f)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A));$
- 3 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ a ak f je injektívne, tak $A = f^{-1}(f(A));$
- 4 $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ a ak f je surjektívne, tak $f(f^{-1}(C)) = C;$
- 5 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ a ak f je injektívne, tak $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B);$
- 6 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$
- 7 $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D);$
- 8 $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$

Definícia

Nech $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$ sú zobrazenia. Potom ich **karteziánsky súčin** je zobrazenie $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$ určené predpisom $f \times g(a, b) = (f(a), g(b))$.

Nech $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$ sú zobrazenia.

- Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
- Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
- Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.

Definícia

Ak A, B sú ľubovoľné množiny, tak zobrazenia $f_1 : A \times B \rightarrow A$ a $f_2 : A \times B \rightarrow B$, dané predpismi:

- $f_1(a, b) = a$,
- $f_2(a, b) = b$,

pre $(a, b) \in A \times B$, budeme nazývať **projekcie z karteziánskeho súčinu** $A \times B$ na množiny A a B .

Definícia

Ak M je konečná množina, tak bijekciu $f : M \rightarrow M$ budeme nazývať **permutáciou** množiny M .

Nech $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$,
Zápis permutácií:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$