

GAaDO

Acyklické digrafy

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Definícia

- *Acyklický digraf*

Definícia

- **Acyklický digraf** je taký digraf, ktorý neobsahuje cyklus.
- **Orientovaný strom**

Definícia

- **Acyklický digraf** je taký digraf, ktorý neobsahuje cyklus.
- **Orientovaný strom** je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.
- Nech $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý digraf. Nech $z \in V$ je taký jeho vrchol, z ktorého sú dosiahnuteľné všetky vrcholy digrafu $\vec{G}$. Potom hovoríme, že vrchol z je

Definícia

- **Acyklický digraf** je taký digraf, ktorý neobsahuje cyklus.
- **Orientovaný strom** je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.
- Nech $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý digraf. Nech $z \in V$ je taký jeho vrchol, z ktorého sú dosiahnuteľné všetky vrcholy digrafu $\vec{G}$. Potom hovoríme, že vrchol z je **prameň**.
- Nech $u \in V$ je taký vrchol digrafu $\vec{G}$, ktorý je dosiahnuteľný zo všetkých ostatných vrcholov digrafu $\vec{G}$. Potom hovoríme, že vrchol u je

Definícia

- **Acyklický digraf** je taký digraf, ktorý neobsahuje cyklus.
- **Orientovaný strom** je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.
- Nech $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý digraf. Nech $z \in V$ je taký jeho vrchol, z ktorého sú dosiahnuteľné všetky vrcholy digrafu $\vec{G}$. Potom hovoríme, že vrchol z je **prameň**.
- Nech $u \in V$ je taký vrchol digrafu $\vec{G}$, ktorý je dosiahnuteľný zo všetkých ostatných vrcholov digrafu $\vec{G}$. Potom hovoríme, že vrchol u je **ústie** (stok).

Definícia

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom. Ak v strome $\vec{G}$ existuje prameň z , z ktorého existuje cesta do všetkých ostatných vrcholov, potom hovoríme, že $\vec{G}$ je **koreňový strom** a vrchol z je koreň stromu $\vec{G}$. **Binárny koreňový** strom je koreňový strom, v ktorom z každý vrchol má vonkajší stupeň najviac 2.

Veta (1)

Ak acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ obsahuje prameň z , potom $\text{ideg}(z) = 0$. Ak $\vec{G}$ obsahuje ústie u , potom $\text{odeg}(u) = 0$.

Veta (1)

Ak acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ obsahuje prameň z , potom $\text{ideg}(z) = 0$. Ak $\vec{G}$ obsahuje ústie u , potom $\text{odeg}(u) = 0$.

Dôkaz:

Nech $\text{ideg}(z) > 0$, potom existuje aspoň jedna orientovaná hrana typu xz . Pretože x je dosiahnuteľné zo z , existuje orientovaná cesta $z = v_1, v_2, \dots, v_k = x$. Zreťazenie tejto cesty s cestou x, z dáva orientovaný cyklus, čo je v spore s acykličnosťou digrafu $\vec{G}$. Analogicky sa dôkaz vykoná aj pre ústie u .

Veta (2)

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom.

Veta (2)

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom.
- 2 V digrafe $\vec{G} = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -polocesta.

Veta (2)

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom.*
- 2 *V digrafe $\vec{G} = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -polocesta.*
- 3 *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý a každá orientovaná hrana množiny H je mostom. (Mostom v orientovanom digrafe rozumieme takú orientovanú hranu, po vybratí ktorej stúpne počet komponentov digrafu).*

Veta (2)

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom.*
- 2 *V digrafe $\vec{G} = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -polocesta.*
- 3 *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý a každá orientovaná hrana množiny H je mostom. (Mostom v orientovanom digrafe rozumieme takú orientovanú hranu, po vybratí ktorej stúpne počet komponentov digrafu).*
- 4 *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý a $|H| = |V| - 1$.*

Veta (2)

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný strom.
- 2 V digrafe $\vec{G} = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -polocesta.
- 3 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý a každá orientovaná hrana množiny H je mostom. (Mostom v orientovanom digrafe rozumieme takú orientovanú hranu, po vybratí ktorej stúpne počet komponentov digrafu).
- 4 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je neorientovane súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V digrafe $\vec{G} = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G neobsahuje polocyklus.

Veta (3)

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický digraf. Potom V obsahuje aspoň jeden vrchol z taký, že $\text{ideg}(z) = 0$ a aspoň jeden vrchol u taký, že $\text{odeg}(u) = 0$.

Veta (3)

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický digraf. Potom V obsahuje aspoň jeden vrchol z taký, že $\text{ideg}(z) = 0$ a aspoň jeden vrchol u taký, že $\text{odeg}(u) = 0$.

Veta (4 - Monotómne očíslovanie)

Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický práve vtedy, keď jeho vrcholy možno usporiadať do postupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$, (t.j. prečíslovať) tak, že platí: Ak $\vec{v_i v_k} \in H$ potom $i < k$.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.
 $\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

$\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

$\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický.

Ak $|V| = 1$, postupnosť ktorú hľadáme je $v = v_1$.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

$\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický.

Ak $|V| = 1$, postupnosť ktorú hľadáme je $v = v_1$.

I.P. Nech tvrdenie platí pre všetky acyklické digrafy s $|V| = n$.

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

$\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický.

Ak $|V| = 1$, postupnosť ktorú hľadáme je $v = v_1$.

I.P. Nech tvrdenie platí pre všetky acyklické digrafy s $|V| = n$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický a $|V| = n + 1 \Rightarrow$

Dôkaz vety 4:

$\Leftarrow$: Sporom: Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, nech sa jeho vrcholy dajú očíslovať tak, ako sa hovorí vo vete a nech $\vec{G}$ obsahuje cyklus $C = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_l} \Rightarrow k_1 < k_2 < \dots k_l = k_1$. Spor.

$\Rightarrow$: Ml vzhľadom na $n = |V|$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický.

Ak $|V| = 1$, postupnosť ktorú hľadáme je $v = v_1$.

I.P. Nech tvrdenie platí pre všetky acyklické digrafy s $|V| = n$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický a $|V| = n + 1 \Rightarrow$ existuje v ňom aspoň jedno ústie v_{n+1} . Zostrojme $\vec{G}' = (V', H') = \vec{G} - \{v_{n+1}\}$, $\vec{G}'$ je tiež acyklický. Keďže $|V'| = n$, platí pre $\vec{G}' = (V, H)$ indukčný predpoklad, t. j. jeho vrcholy možno usporiadať do postupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$. Postupnosť $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ je hľadanou postupnosťou pre $\vec{G}$.

Definícia

Očíslovanie vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_n$ acyklického digrafu $\vec{G} = (V, H)$, pre ktoré platí: ak $\vec{v_i v_k} \in H$, potom $i < k$, nazveme **monotónnym očíslovaním vrcholov** acyklického digrafu.

Algoritmus na monotómne očíslovanie:

- **Krok 1.** $\forall v \in V : d(v) = \text{ideg}(v)$,
 $V_0 = \{v : v \in V, d(v) = 0\}$. Polož $k := |V_0|$ a prvky z množiny V_0 zorad' do ľubovoľnej postupnosti $P = v_1, v_2, \dots, v_k$. Polož $i := 1$.
- **Krok 2.** $\forall w$ výstupnej hviezdy vrchola v_i taký, že $w \neq v_i$, urob:
 $d(w) := d(w) - 1$.
Ak $d(w) = 0$, tak $k := k + 1$, $v_k := w$.
- **Krok 3.** Ak $k = n = |V|$, tak STOP, inak polož $i := i + 1$ a choď na Krok 2.

Zložitosť algoritmu na monotónne očíslovanie : Majme digraf uložený vo forme výstupných hviezd. Výpočet značiek $d(v)$ vyžaduje čas $O(m)$, pre výber množiny V_0 a stanovenie postupnosti $v_1, v_2, \dots, v_k$ treba prekontrolovať $n = |V|$ vrcholov. Krok 1. má teda zložitosť $O(m + n)$. Krok 2. pre každý vrchol v_i zmení značky všetkých vrcholov jeho výstupnej hviezd – má teda $odeg(v_i)$ operácií. Počet všetkých operácií vykonaných v kroku 2. je $\sum_{v \in V} odeg(v) = |H| = m$. V kroku 3. sa vykoná n operácií, takže v oboch krokoch sa vykoná $O(n + m)$ operácií. Algoritmus má teda zložitosť $O(m + n)$.