VIAZANÉ EXTRÉMY

Pr. L.E.? $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + 6x + 2y$

1. S.B. $f'_x = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, $f'_y = -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ } $A = [3,1]$ – S.B.

2. test. $f''_{xx} = -2$, $f''_{yy} = -2$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

$$f''_{xx} = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

$\Rightarrow$ v A je L. Max

test pre F2P

Nech $w = f(x,y,z)$ je F3P

Postup pri hľadaní L. E

1. SB. t.j. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ súst. rovníc, $A_1, A_2, \ldots$ SB

2. test DOHODA INDEX $1 \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}$, $2 \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}$ $3 \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}$

t.j. $a_{11} = f''_{xx}$ $a_{12} = f''_{xy}$ $a_{23} = f''_{yz}$

1° $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$ tak v príslušnom SB je L. MIN

ak F2P

2° $a_{11} < 0$ $\underset{\sim\sim\sim}{\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}} > 0$ $\begin{vmatrix} & & \end{vmatrix} < 0$ tak v SB je L. MAX

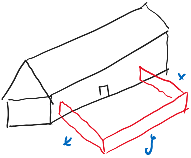
3° INÁ KOMBINÁCIA ZNAM. ? ?

+ + − ?
+ 0 + ?

VIAZANÉ EXTRÉMY

SADA PRÍKLADOV

Pr.



MÁŠTAĽ / STATOK

VYTVORIŤ OBDĹŽNIKOVÚ OHRADU, PRIČOM JEDNU STRANU TVORÍ BUDOVA, TAK ABY PLOCHA BOLA MAXIMÁLNA A OBMEDZENIE MÁME

PLOT $\boxed{}$ 60 m

PODMIENKA / VÄZBA

$P = f(x,y) = xy \to MAX$ ak $\underline{\underline{2x+y=60}} \iff \underbrace{2x+y-60}_{g(x,y)} = 0$

ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM

$\| \quad f(x,y) \to \substack{MIN \\ MAX}$ ak $g(x,y) = 0 \quad \|$

VÄZBA → určuje prípustné $[x,y]$!

Riešenie (jednoduché)

$f(x,y) = \textcircled{x \cdot y} \to MAX$ ak $\textcircled{2x+y=60}$.

$y = 60 - 2x$

$h(x) = f(x,y) = x(60-2x) = 60x - 2x^2$ F1P

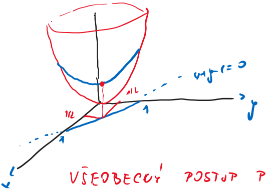
1. SB $h'(x) = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = 15$ $y = 30$ $[15, 30]$

2. der $h''(x) = -4 < 0$ L. MAX OPT. OHRADA MÁ $x = 15$
$y = 30$

EŠTE JEDEN POHĽAD

MÁME $f(x,y) = x^2 + y^2$ evidentne L. MIN JE v $[0,0]$

pridáme VÄZBU (OBMEDZENIE)



$g(x,y) = x + y - 1 = 0$

NÁS ZAUJÍMAJÚ LEN TIE $[x,y]$, KTORÉ LEŽIA NA PRIAMKE

HĽADÁME L.E TEJTO MODREJ KRIVKY

VŠEOBECNÝ POSTUP PRI HĽADANÍ VIAZ. EXT (V.E)

SÚ 2. MOŽNOSTI $f(x,y) \to \substack{MIN \\ MAX}$, ak $g(x,y) = 0$

$\boxed{\textcircled{1°}}$ z VÄZBY $g(x,y) = 0$ viem vyjadriť (jednoznačne) buď $\boxed{y = h(x)}$
resp $x = g(y)$

POTOM

$= f(x,y) = f(x, h(x)) = F(x)$ F1P

U nás || $f(x,y)=x^2+y^2$ ak $x+y-1=0$ t.j. $y=1-x$ ||

MÔŽE BYŤ A Lag.F.

$$F(x)=x^2+(1-x)^2$$

1° $F'(x)=2x+2(1-x)(-1)=0 \Rightarrow x-1+x=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$

2° TEST $F''=4>0$ t.j. v $A=[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ je lok. MIN

VIAZANÝ EXTR: $f(x,y)\to$ L.E. ak $g(x,y)=0$

TREBA UROBIŤ

✓ 1° nájsť $A=[a,b]$, taký, že $g(a,b)=0$ ✓✓

2° ukázať $\forall (x,y)$ spĺňajúce $g(x,y)=0$ platí $f(x,y)\geq f(a,b)$

$\boxed{2°}$ Z väzby $g(x,y)=0$ nevieme (jednoz.) vyjadriť ani x ani y

V TOMTO PRÍPADE ZOBER POMOCNÚ FCIU (LAGRANGEOVU)

$$L(x,y)=L(x,y,\lambda)=\overset{\text{PÔVODNÁ F.}}{f(x,y)}+\underset{\text{PARAMETER}}{\lambda}\,\overset{\text{väzba (LS)}}{g(x,y)}$$

NAMIESTO V.E HĽADÁM L.E. PRE $L(x,y)$

1° SB

1° $L'_x=0$

2° $L'_y=0$

3° $L'_\lambda=g(x,y)=0$

3° rovnica je väzba

Riešim súst. 3 rovníc, dostávam stac. body. 3. ROVNICA SPÔSOBÍ, ŽE SB $A=[a,b]$ splňa $g(a,b)=0$

2° Predp., že ďalej (cez druhé Parc. Der.) sme zistili, že $L(x,y)$ má v A LOK. MAX t.j.

$\forall (x,y)$ $L(x,y)\leq L(a,b)$

t.j. $f(x,y)+\lambda g(x,y)\leq f(a,b)+\lambda \overset{0}{\overset{\parallel}{g(a,b)}}$ z 3. rov.

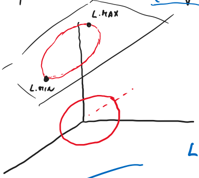
NÁS ZAUJÍMAJÚ LEN TIE BODY $[x,y]$, pre ktoré $g(x,y)=0$

a pre ne $f(x,y)\geq f(a,b)$

LOKÁLNY EXTRÉM LAGR. FCIE JE VIAZANÝ EXTRÉM

Príkl.

Nájdite L.E fcie $\boxed{f(x,y)=x+y}$ ak $\boxed{\underbrace{x^2+y^2-1}_{g(x,y)}=0}$ VÄZBA



graf roviny

VÄZBA

$x^2+y^2=1 \to$ kružnic

POKUS

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

NEMÁME JEDN. VYJ

$$L(x,y)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

1. SB. $L'_x=1+\lambda 2x=0$

SÚSTAVA 3 NEL. ROVNIC

NELINEARITU SPÔSOBUJE 3. ROV

BEST OF

$L'_y = 1 + \lambda 2y = 0$

$(L'_\lambda =)$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{-1}{2x}$

$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{-1}{2y} \Rightarrow -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \Leftrightarrow \boxed{x = y}$

VZŤAH MEDZI x, y

$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = y$ či mám 2 S. B.

$A_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $A_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$ $\lambda_2 = \sqrt{2}$

Teď: $L''_{xx} = 2\lambda$; $L''_{yy} = 2\lambda$; $L''_{xy} = 0$

Pre A_1:

$-2\sqrt{2} < 0$ $\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} > 0$ → A_1 L. MAX
V. MAX

Pre A_2:

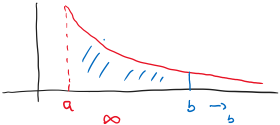
$2\sqrt{2} > 0$ $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} > 0$ → A_2 L. MIN
V. MIN

NÁVRAT URČITÝ INT.

v DEF. URČ. INT. $\int_a^b f(x)\,dx$ sa predp.

① $[a, b]$ - konečný 2° f je ohr. na $[a, b]$

ÜVAŽUJEME f na $[a, \infty)$ - ohr.



? $\int_a^\infty f(x)\,dx$? plocha pod grafom f

$\int_a^b f(x)\,dx \to$ plocha

$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

dá

Ďalšie veraic: nech 1° f je def. na $\langle a, \infty)$
2° f je integrov. na $\langle a, b\rangle$ pre $\forall b > a$
③ existuje vlastná
$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Potom $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^\infty$ - KONVERGENTNÝ

AK NIEKTORÁ POD. NEPLATÍ
$\int^\infty$ - DIVERGENTNÝ

KRÁTKA VERZIA PRE POKROČILÝCH

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \underline{\int_a^b f(x)\,dx} \overset{N-L}{=} \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \Big(\overset{F(\infty)}{\overset{\shortparallel}{\lim_{b\to\infty} F(b)}}\Big) - F(a) =$$

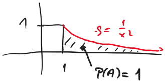
$$= F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty$$

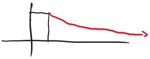
výpočet limity

Pr. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\shortparallel \quad -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0+1=1$$



$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$



$$\shortparallel \quad \ln x\Big|_1^\infty = \infty$$ DIVERGENTNÝ

Veta o strednej (priemernej) hodnote spojitej fcie

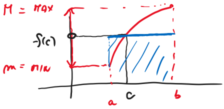
MOTIVÁCIA – DISK.

poznáme $a_1, a_2, \dots, a_n$

priemerná hod. $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

Máme $f(x)$ spoj na $\langle a,b\rangle$ (∞ – veľa hodnôt) GEOM. VÝZ.

Čo je priemerná (stredná) hodnota f na $\langle a,b\rangle$? PREDSTAVA ?



ÚVAHY

$$\overset{MIN}{m} \le f(x) \le \overset{MAX}{M} \quad \text{na } \langle a,b\rangle \qquad \int_a^b$$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \le M$$

↳ číslo medzi MIN a MAX f(x)

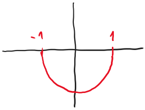
$$\shortparallel \quad f(c)$$

Preto

$$\underbrace{f(c)(b-a)}_{\text{PLOCHA OBDĹŽ.}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{PLOCHA POD GRAFOM } f}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ PRIEMERNÁ HODNOTA f na $\langle a,b\rangle$

Pr. KANÁL MÁ PRIEREZ OHRANIČENÝ FCIOU $f(x) = x^2-1$ na $\langle -1,1\rangle$. NÁJDITE PRIEM. HĹBKU



$$PH = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2-1\,dx = \frac{2}{2}\int_0^1 x^2-1\,dx = \frac{x^3}{3}-x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$ P. hĺbka je $\frac{2}{3}$

14. týždeň 1' Pred. cca 30'

2- KONZULT.

GLOB. MAX $f(x,y)$

DERIVÁCIA V SMERE