

# NMPaMŠ – 13.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Základné pojmy testovania štatistických hypotéz

**Nulová hypotéza  $H_0$  (parameter  $Q_0$ )** – hypotéza, ktorej platnosť overujeme

**Alternatívna hypotéza  $H$  (parameter  $Q$ )** – hypotéza, ktorú prijímame, keď neplatí nulová hypotéza

Môže byť a) **pravostranná  $H: Q > Q_0$**

b) **ľavostranná  $H: Q < Q_0$**

c) **obojstranná  $H: Q \neq Q_0$**

**Testovacia charakteristika  $G$**  – funkcia, ktorá závisí od náhodného výberu

**Kritická oblasť  $K_\alpha$  (oblasť zamietnutia na hladine významnosti  $\alpha$ )** - interval, určený kvantilom testovacej charakteristiky  $G$ , keď hodnota  $G \in K_\alpha$  **zamietame hypotézu  $H_0$**

# Testy

## 1. Y – test zhody strednej hodnoty so známou $\mu_0$ ( $\sigma$ poznáme)

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \mu = \mu_0$ .

**Testovacia charakteristika:**  $Y = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ .

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \mu > \mu_0$  je  $K_\alpha = (y_{1-\alpha}; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \mu < \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -y_{1-\alpha})$

c)  $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$

kde  $y_\beta$  je  $\beta$ - kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

## 2. t - test zhody strednej hodnoty so známou $\mu_0$ ( $\sigma$ nepoznáme)

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \mu = \mu_0$ .

**Testovacia charakteristika:**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}.$$

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \mu > \mu_0$  je  $K_\alpha = (t_{1-\alpha, n-1}; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \mu < \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -t_{1-\alpha, n-1})$

c)  $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}; \infty)$

kde  $t_{\beta, n-1}$  je  $\beta$  kvantil Studentovho  $t$ -rozdelenia pravdepodobnosti s  $n - 1$  stupňami voľnosti.

### 3. $\chi^2$ - test zhody rozptylu $\sigma^2$ so známou $\sigma_0^2$

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ .

**Testovacia charakteristika:**

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}.$$

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (\chi_{1-\alpha, n-1}^2; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (0; \chi_{\alpha, n-1}^2)$ ,

c)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (0; \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2) \cup (\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2; \infty)$

kde  $\chi_{\beta, n-1}^2$  je  $\beta$  kvantil  $\chi^2$  rozdelenia pravdepodobnosti :

## Pr. 1:

(a) Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

- Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.
- Nájdite 99%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 0,5$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu < 0,5$ .

rozdeľenie podľa počtu

(i)

$n = 10$

| $x_i$ | $n_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$    | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$ |
|-------|-------|------------------------|-------------------------------|
| 0,47  | 1     | $3,8025 \cdot 10^{-4}$ | $3,8025 \cdot 10^{-4}$        |
| 0,48  | 2     | $0,9025 \cdot 10^{-4}$ | $1,805 \cdot 10^{-4}$         |
| 0,485 | 1     | $0,2025 \cdot 10^{-4}$ | $0,2025 \cdot 10^{-4}$        |
| 0,49  | 2     | $0,0025 \cdot 10^{-4}$ | $0,005 \cdot 10^{-4}$         |
| 0,495 | 1     | $0,3025 \cdot 10^{-4}$ | $0,3025 \cdot 10^{-4}$        |
| 0,5   | 2     | $1,1025 \cdot 10^{-4}$ | $2,205 \cdot 10^{-4}$         |
| 0,505 | 1     | $2,4025 \cdot 10^{-4}$ | $2,4025 \cdot 10^{-4}$        |

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = 0,4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i = 0,00011916$$

$$s = s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0,0109161$$

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

$\mu$  - 2 n'ime,  $s$  - n'e n'ime

$$\mu \in \left\langle 0,4895 - 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}}, 0,4895 + 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\mu \in \langle 0,48168, 0,497311 \rangle$$

$$t_{1-\frac{0,05}{2}, 10-1} = t_{0,975, 9} = 2,2622 \rightarrow \text{z tab'ly, 15-krantil}$$

Studentov-t rozdel.

$$\delta^2 \in \left( \frac{(n-1) \textcircled{sx^2} \delta^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1) \textcircled{sx^2} \delta^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \quad \delta^2 \in (0,00005637, 0,000317144)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} &= \chi^2_{0,975, 9} = 19,023 \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} &= \chi^2_{0,025, 9} = 2,7004 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{z tabelky s-kvantil} \\ \chi^2 \text{ rozdelenie} \end{array}$$

iii

$\alpha = 0,05$  (hla di na vyznemnosti)

$H_0: \mu_0 = 0,5$

$H_1: \mu < 0,5 = \mu_0$

$\mu$  - zname,  $\sigma$  - nezname  $\Rightarrow$  z test

$\Downarrow$   
 $\boxed{\mu < \mu_0}$

ľuvstvan hyp.

$\Downarrow$   
 $K_2 \in (-\infty; t_{1-\alpha, n-1})$

testovacia  
charakteris.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sqrt{n}$$

$$t = \frac{0,4895 - 0,5}{0,010916} \cdot \sqrt{10}$$

$$t = -3,0418$$

$$t_{1-\alpha, n-1} = t_{0,95,9} = 1,8331 \quad (\text{B-quantil - t-test})$$

$$t \notin K_2 \in (-\infty; -1,8331)$$

$t \notin K_2$ , zamietame  $H_0$

$\Downarrow$   
prijmame  $\mu < 0,5$

## Pr. 2:

- (k) Študenti písali zápočtovú s maximálnym ziskom 15 bodov. Náhodným výberom boli zistené nasledujúce výsledky (počty získaných bodov):

|       |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $x_i$ | 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| $n_i$ | 1 | 2 | 1 | 4 | 5 | 5 | 3  | 2  | 1  | 1  |

Predpokladáme normálne rozdelenie počtu bodov so známym  $\sigma^2 = 14$ . Určte:

- 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 6,2$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu > 6,2$ ;
- na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 7,8$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu \neq 7,8$

(iv)  $\alpha = 0,1$        $H_0 : \mu_0 = 6,2$  ,     $H_1 : \mu > 6,2 = \mu_0$     pravostranná hypotéza

$\mu$  - 2 náme,  $\sigma^2$  - 2 náme  $\Rightarrow$  1. test

distancia  
okruhu.

$$y = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{7,2 - 6,2}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{25} = 1,336306$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot n_i = \frac{1}{25} \cdot 180 = 7,2$$

$y_{0,9} = 1,28155$

$$K_\alpha \in (y_{1-\alpha}, \infty) = (1,28155, \infty)$$

$$y \in K_\alpha \Rightarrow H_0 \text{ zamietame}$$

### Pr. 3:

- (i) Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl  $\sigma^2 = 0,06$  bol urobený náhodný výber s nameranými hodnotami:

1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7.

Určte:

- 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 90 %-ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 99 %-pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

$$\mu \in \left( -\infty, \bar{x} + \gamma_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

keďže  $1 - \alpha = 0,99$   
 $n = 7$   $\sigma^2 = 0,06$

$$\gamma_{1-\alpha} = \gamma_{0,99} = 2,32625$$

| i | $x_i$ |
|---|-------|
| 1 | 0,9   |
| 2 | 1,2   |
| 3 | 1,3   |
| 4 | 1,4   |
| 5 | 1,5   |
| 6 | 1,7   |
| 7 | 1,8   |

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 x_i = 1,4$$

$$\mu \in \left( -\infty, 1,4 + 2,32625 \cdot \frac{\sqrt{0,06}}{\sqrt{7}} \right)$$

$$\mu \in \left( -\infty, 1,6154 \right)$$

Pr. 4:

(e) Hráč bowlingu nahral nasledujúce počty bodov:

7, 9, 8, 4, 6, 5, 0, 3, 10, 7.

- Nájdite 95%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- Na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 6$  proti  $H_1 : \mu < 6$ .

$\hat{\lambda}$ .

| $x_i$ | $n_i$ | $(x_i - \bar{x})^2 n_i$ |
|-------|-------|-------------------------|
| 0     | 1     | 36,81                   |
| 3     | 1     | 8,41                    |
| 4     | 1     | 3,61                    |
| 5     | 1     | 0,81                    |
| 6     | 1     | 0,01                    |
| 7     | 2     | 1,21                    |
| 8     | 1     | 6,41                    |
| 9     | 1     | 9,61                    |
| 10    | 1     | 36,81                   |

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 x_i n_i = 5,9$$

$$n = 10$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

$$s^{*2} = 8,989$$

$$\sigma^2 \in \left( \frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}, \infty \right)$$

$$\chi^2_{0,95,9} = 16,919$$

$$\sigma^2 \in \left( \frac{9 \cdot 8,989}{16,919}, \infty \right) = \underline{\underline{(4,781, \infty)}}$$

in:  $H_0: \mu_0 = 6$   $\alpha = 0,1$

$$H_1: \mu < 6 = \mu_0$$

TCH:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s^*} \sqrt{n}$$

$$K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha, n-1})$$

$$t_{0,9;9} = 1,3830$$

$$t = \frac{5,9 - 6}{\sqrt{8,989}} \sqrt{10} = -0,105$$

$$K_\alpha = (-\infty, -1,3830)$$

$t \notin K_\alpha$ , No primame

## Pr. 5:

(c) Trasa na určitej linke MHD bola prejdená rýchlosťami (v km/hod):

8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0; 8,5.

- Otestujte na hladine významnosti 0,01 hypotézu  $H_0 : \sigma^2 = 0,35$  oproti hypotéze  $H_1 : \sigma^2 > 0,35$ .
- Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

$\alpha = 0,01$      $H_0 : \sigma^2 = 0,35$  ,     $H_1 : \sigma^2 > 0,35 = \sigma_0^2$     pravosmerná hypotéza

$\sigma_0^2$  - známe  $\rightarrow$  z-test

testovacia  
charakter.

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2$$

$$K_\alpha \in (\chi_{1-\alpha, n-1}^2, \infty)$$

| $x_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(x_i - \bar{x})^2 n_i$ |
|-------|-------------------|-------------------------|
| 7,5   | -0,9              | 0,81                    |
| 7,8   | 0,6               | 0,72                    |
| 8,2   | 0,2               | 0,08                    |
| 8,5   | 0,1               | 0,02                    |
| 9     | 0,6               | 0,72                    |
| 9,5   | 1,1               | 1,21                    |

$$\chi_{0,99,9}^2 = 21,666$$

$$n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i n_i = 8,4$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i = 0,3955$$

$$K_\alpha \in (21,666, \infty)$$

$$\chi^2 \notin K_\alpha \rightarrow H_0 \text{ platí}$$