

# Matematika 2 – 12.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

# DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

## Viazané extrémymy funkcie dvoch premenných

Nech je daná funkcia  $z = f(x, y)$  definovaná na  $M$  a nech  $L$  je množina všetkých bodov z  $M$ , pre ktoré platí  $g(x, y) = 0$ .

**Viazaný lokálny extrém** - lokálny extrém funkcie  $z = f(x, y)$  na množine  $L$

Funkciu  $g(x, y) = 0$  – nazývame **väzba**

**Určenie viazaných extrémov:**

1. Ak sa dá vyjadriť z väzby jednoznačne niektorá premenná - dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej, viazaný extrém hľadáme ako lokálny extrém jednej premennej

$z''_x$  alebo  $z''_y > 0 \rightarrow$  **viazané lokálne minimum**

$z''_x$  alebo  $z''_y < 0 \rightarrow$  **viazané lokálne maximum**

2. Ak sa z väzby nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Stacionárny bod sa určí zo sústavy

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

viazaný extrém sa určí ako pri lokálnych extrémoch

**Pr. 1 – 93 / 7: Nájdite viazané extrémny funkcie**

$$z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8, \text{ ak } x + y = 0$$

1. **Vyjadríme z väzby niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej**
2. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x alebo y) a dáme deriváciu rovnú nule, druhú súradnicu stacionárneho bodu určíme z väzby**
3. **Vypočítame parciálnu deriváciu druhého rádu**
4. **Určíme  $\Delta_1(A) = z''_{xx}$  alebo  $z''_{yy}$  a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny**

**Pr. 2 – 93 / 15:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2, \text{ ak } x + 2y = 8$$

**Pr. 3 – 93 / 10:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy, \text{ ak } x - 2y = 0 \quad \text{lok. max. v } [0, 0]$$

- 1. Vyjadríme z väzby niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie  $z = f(x, y)$ , dostaneme funkciu jednej premennej**

$$\begin{aligned} x - 2y = 0 &\rightarrow x = 2y & z &= 46 - (2y)^2 - 4y^2 + 2(2y)y \\ & & z &= 46 - 4y^2 - 4y^2 + 4y^2 = 46 - 4y^2 \end{aligned}$$

- 2. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu  $z = f(x, y)$  podľa  $x$  alebo  $y$ ) a dáme deriváciu rovnú nule, druhú súradnicu stacionárneho bodu určíme z väzby**

$$z'_y = -8y$$

$$z'_y = -8y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{SB: } A [0, 0]$$

- 3. Vypočítame parciálnu deriváciu druhého rádu pre funkciu  $z = f(x, y)$**

$$z''_{yy} = -8$$

- 4. Určíme  $\Delta_1(A) = z''_{xx}$  alebo  $z''_{yy}$  a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny**

$$\Delta_1(A) = z''_{yy} = -8 < 0 \quad \rightarrow \text{v bode } A \text{ má funkcia viazané lokálne maximum}$$

**Pr. 4 – 93 / 13:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x^3 + y^3 + 3xy + 2, \text{ ak } y - x = 0$$

**Pr. 5 – 93 / 12:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \text{ ak } 2y - x = 0 \quad \text{lok. min. v } [1, \frac{1}{2}]$$

$$\text{lok. max. v } [0, 0]$$

$$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \quad z = (2y)^3 + 8y^3 - 6(2y)y + 1$$

$$z = 8y^3 + 8y^3 - 12y^2 + 1 = 16y^3 - 12y^2 + 1$$

$$z'_y = 48y^2 - 24y \quad z'_y = 48y^2 - 24y = 0$$

$$24y(2y - 1) = 0 \rightarrow 24y = 0, 2y - 1 = 0$$

$$y = 0 \quad y = \frac{1}{2}$$

$$SB: A [0, 0], B [1; 0, 5]$$

$$x = 2 \cdot 0 = 0 \quad x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$z''_y = 96y - 24$$

$$\Delta_1(A) = z''_y = 96 \cdot 0 - 24 = -24 < 0 \rightarrow \text{v bode } A \text{ má funkcia viazané lokálne maximum}$$

$$\Delta_1(B) = z''_y = 96 \cdot 0,5 - 24 = 24 > 0 \rightarrow \text{v bode } B \text{ má funkcia viazané lokálne minimum}$$

**Pr. 6 – 93 / 22:**Nájdite viazané extrémym funkcie

$$z = 8 - 2x - 4y, \text{ ak } x^2 + 2y^2 = 12$$

1. Z väzby sa nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Derivujeme Lagrangeovu funkciu podľa x a y

3. Určíme stacionárne body zo sústavy
- $$\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

4. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu Lagrangeovej funkcie a ich hodnoty pre stacionárne body

5. Určíme  $\Delta_2(A)$  a  $\Delta_1(A)$  pre všetky stacionárne body a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémym

**Pr. 7 – 94 / 28:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ ak } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$$

**Pr. 8 – 94 / 24:** Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x - 2y + 3, \text{ ak } x^2 + y^2 = 5$$

$$\text{lok. min. v } [-1, 2]$$

$$\text{lok. max. v } [1, -2]$$

- 1. Z väzby sa nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná, zostrojíme Lagrangeovu funkciu  $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$**

$$L(x, y) = x - 2y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

- 2. Derivujeme Lagrangeovu funkciu podľa  $x$  a  $y$**

$$L'_x = 1 + 2\lambda x$$

$$L'_y = -2 + 2\lambda y$$

- 3. Určíme stacionárne body zo sústavy**

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

$$1 + 2\lambda x = 0 \quad -2 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$2\lambda x = -1$$

$$2\lambda y = 2$$

$$x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 5 = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5 \rightarrow \frac{1+4}{4\lambda^2} = 5 \rightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: \quad x = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$SB: A [-1, 2], B[1, -2]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}: \quad x = -\frac{1}{2 \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 \quad y = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

4. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu Lagrangeovej funkcie a ich hodnoty pre stacionárne body

|                      | A: $\lambda = \frac{1}{2}$ | B: $\lambda = -\frac{1}{2}$ |
|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $L'_{xx} = 2\lambda$ | 1                          | -1                          |
| $L'_{xy} = 0$        | 0                          | 0                           |
| $L'_{yx} = 0$        | 0                          | 0                           |
| $L'_{yy} = 2\lambda$ | 1                          | -1                          |

5. Určíme  $\Delta_2(A)$  a  $\Delta_1(A)$  pre všetky stacionárne body a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrém

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(A) = L''_{xx}(A) = 1 > 0$$

*v bode A má funkcia viazané lokálne minimum*

$$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(B) = L''_{xx}(B) = -1 < 0$$

*v bode B má funkcia viazané lokálne maximum*

**Pr. 9** – 94 / 25: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = y - x + 3, \text{ ak } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{lok. min. v } \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{lok. max. v } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Dú: str. 94 / 8, 14, 21, 22, 23, 27, 29

## Inštrukcie k 2. zápočtovej písomke

**Streda 21. 5. 2025, 9:00, ZP4**

čas: 70 minút, 6 príkladov, 35 bodov, teória 15 bodov (z prezentácií z prednášok na stránke predmetu)

Okruhy:

1. určitý integrál – substitúcia, per partes
2. plocha elementárnej oblasti
3. objem elementárnej oblasti rotujúcej okolo osi  $x$
4. parciálne derivácie prvého rádu funkcie o dvoch premenných, dotyková rovina ku grafu funkcie v danom bode
5. lokálne extrémny funkcie
6. lokálne viazané extrémny funkcie

Doniesť: dvojhárok s vytlačenou hlavičkou, ISIC, písacie potreby