

Matematika 2 – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1: Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = 5ye^x + 2x^2 + xy, \quad A = [0, -1, ?]$$

Pr. 2 – 86 / 31: Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = 2x^2 - 4y^2, \quad A = [2, 1, ?]$$

- 1. Dopočítame súradnicu z_0 pre bod A dosadením súradníc x_0, y_0 do predpisu funkcie $z = f(x, y)$.**

$$z_0 = 2x_0^2 - 4y_0^2 = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1^2 = 8 - 4 = 4$$

- 2. Vypočítame parciálne derivácie funkcie $z = f(x, y)$ podľa x a y .**

$$z'_x = 4x, \quad z'_y = -8y$$

- 3. Určíme $z'_x(A), z'_y(A)$.** $z'_x(A) = 4 \cdot 2 = 8, \quad z'_y(A) = -8 \cdot 1 = -8$

- 4. Napísať rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A a upraviť.**

$$\rho: z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

$$z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1)$$

$$0 = 8x - 16 - 8y + 8 - z + 4 \quad \rightarrow \quad \rho: \quad \mathbf{0 = 8x - 8y - z - 4}$$

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Lokálne extrémny funkcie dvoch premenných

Pr. 1 – 88 / 8: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = x^2 + y^2 + 10y - 5$$

- 1. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x , y) a dáme derivácie rovné nule**
- 2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu**
- 3. Určíme $\Delta_2(A)$, $\Delta_1(A)$ a zistíme, či funkcia má lokálne extrémym**

Pr. 2 – 88 / 6: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = 8 - x^2 - y^2 + 6y$$

lok. max. v $[0,3]$

1. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$z'_x = -2x \quad z'_x = -2x = 0 \\ x = 0$$

$$z'_y = -2y + 6 \quad z'_y = -2y + 6 = 0 \\ -2y = -6 \\ y = 3$$

stacionárny bod $A [0, 3]$

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$z''_{xx} = -2 \quad z''_{xy} = 0 \\ z''_{yx} = 0 \quad z''_{yy} = -2$$

3. Určíme $\Delta_2(A)$, $\Delta_1(A)$ a zistíme, či funkcia má lokálne extrémym

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(A) = -2 < 0$$

v bode A má funkcia lokálne maximum

Pr. 3 – 88 / 27: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 4$$

Pr. 4 – 89 / 42: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = x^4 + 2y^2 + 4xy$$

lok. min. v $[1, -1]$ a $[-1, 1]$

1. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$z'_x = 4x^3 + 4y \quad z'_x = 4x^3 + 4y = 0$$

$$4x^3 + 4(-x) = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$4x = 0, (x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, \quad x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y = 0$$

$$y = -x = -1, y = -(1) = 1$$

$$z'_y = 4y + 4x \quad z'_y = 4y + 4x = 0$$

$$4y = -4x$$

$$y = -x$$

stacionárne body A $[0, 0]$, B $[1, -1]$, C $[-1, 1]$

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$z''_{xx} = 12x^2 \quad z''_{xy} = 4$$

$$z''_{yx} = 4 \quad z''_{yy} = 4$$

3. Určíme Δ_2 , Δ_1 pre stacionárne body a zistíme, či funkcia má v týchto bodoch lokálne extrém

	A	B	C
$z''_{xx} = 12x^2$	0	$12 \cdot 1^2 = 12$	$12 \cdot (-1)^2 = 12$
$z''_{xy} = 4$	4	4	4
$z''_{yx} = 4$	4	4	4
$z''_{yy} = 4$	4	4	4

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(A) = 0$$

v bode A funkcia nemá extrém, sedlový bod

$$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0, \quad \Delta_1(B) = z''_{xx}(B) = 12 > 0$$

v bode B má funkcia extrém, lokálne minimum

$$\Delta_2(C) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0, \quad \Delta_1(C) = z''_{xx}(C) = 12 > 0$$

v bode C má funkcia extrém, lokálne minimum

Pr. 5 – 89 / 40: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = 2x^3 + y^2x - 216x + 5$$

Pr. 6 – 88 / 19: Nájdite lokálne extrémymy funkcie

$$z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$$

lok. min. v $[-5, 5]$

1. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x + y + 5 & z'_x &= 2x + y + 5 = 0 & z'_y &= 2y + x - 5 & z'_y &= 2y + x - 5 = 0 \\ & & y &= -2x - 5 & & \xrightarrow{\text{red arrow}} & 2(-2x - 5) + x - 5 &= 0 \\ & & & & & & -4x - 10 + x - 5 &= 0 \\ & & & & & & -3x &= 15 \\ & & y &= -2 \cdot (-5) - 5 = 10 - 5 = 5 & & & & x &= -5 \\ & & y &= 5 & & & & & \end{aligned}$$

stacionárny bod A $[-5, 5]$

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2 & z''_{xy} &= 1 \\ z''_{yx} &= 1 & z''_{yy} &= 2 \end{aligned}$$

3. Určíme $\Delta_2(A)$ $\Delta_1(A)$ a zistíme, či funkcia má lokálny extrém

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(A) = 2 > 0$$

v bode A funkcia má extrém, lokálny minimum

Dú: str. 88 /9 - 11, 20, 23, 26, 31, 39, 42, 46, 48