

# Matematika 2 – 10.cvičenie

## opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

# DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Funkcia dvoch premenných  $z = f(x, y)$

*parciálna derivácia **prvého rádu** funkcie  $z = f(x, y)$  podľa premennej  $x$*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z'_x \quad y \text{ je konš.}$$

*parciálna derivácia **prvého rádu** funkcie  $z = f(x, y)$  podľa premennej  $y$*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z'_y \quad x \text{ je konš.}$$

*parciálna derivácia druhého rádu funkcie*  $z = f(x,y)$  podľa premennej  $x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_x$$

*parciálna derivácia druhého rádu funkcie*  $z = f(x,y)$  podľa premennej  $y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_y$$

## Dotyková rovina ku grafu funkcie dvoch premenných

Nech je funkcia  $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  spojitá a diferencovateľná v okolí bodu  $A = [x_0, y_0, z_0]$ , potom dotyková rovina  $\rho$  ku grafu tejto funkcie v bode A je

$$\rho: z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

## Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie:

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

## Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(x^1)' = 1$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

**Pr. 1 – 82 /1:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = 2x^2 + 4y^3 - 15x^2y + xy^3$$

**Pr. 2:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = (x^2 + 3y)(\cos 2x - y)$$

**Pr. 3 – 82 / 5:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = (2x + 5y)\sin 3x$$

$$z'_x = 2 \sin 3x + (2x + 5y) \cdot 3 \cdot \cos 3x$$

$$z'_y = 5 \sin 3x$$



**Pr. 4 – 83 / 10:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{\ln x}{x - y} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

**Pr. 5 – 82 / 7:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$z'_x = \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2yx^2 - 2y^3 - 2x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

**Pr. 6 – 83 / 11:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{3-y}{x^2-y^2} + e^{2x+3y}$$

**Pr. 7 – 84 / 21:** určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \ln(xy - 4) + \frac{y}{x + 2}$$

$$z'_x = \frac{1}{xy - 4}y + \frac{-y}{(x + 2)^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{xy - 4}x + \frac{1}{x + 2}$$

**Pr. 8 – 86 / 34:** Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = [3, 4, ?]$$

1. **Dopočítame súradnicu  $z_0$  pre bod A dosadením súradníc  $x_0, y_0$  do predpisu funkcie  $z = f(x, y)$ .**
2. **Vypočítame parciálne derivácie funkcie  $z = f(x, y)$  podľa  $x$  a  $y$ .**
3. **Určíme  $z'_x(A), z'_y(A)$  .**
4. **Napísať rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A a upraviť.**

**Pr. 9 – 86 / 31:** Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = 2x^2 - 4y^2, \quad A = [2, 1, ?]$$

**1. Dovočítame súradnicu  $z_0$  pre bod A dosadením súradníc  $x_0, y_0$  do predpisu funkcie  $z = f(x, y)$ .**

$$z_0 = 2x_0^2 - 4y_0^2 = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1^2 = 8 - 4 = 4$$

**2. Vovočítame parciálne derivácie funkcie  $z = f(x, y)$  podľa  $x$  a  $y$ .**

$$z'_x = 4x, \quad z'_y = -8y$$

**3. Určíme  $z'_x(A), z'_y(A)$  .**  $z'_x(A) = 4 \cdot 2 = 8, z'_y(A) = -8 \cdot 1 = -8$

**4. Napísať rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A a upraviť.**

$$\rho: z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

$$z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1)$$

$$0 = 8x - 16 - 8y + 8 - z + 4 \quad \rightarrow \quad \rho: \quad \mathbf{0 = 8x - 8y - z - 4}$$

Dú: str. 82 / 1 - 30

str. 85 /32, 33, 35, 36

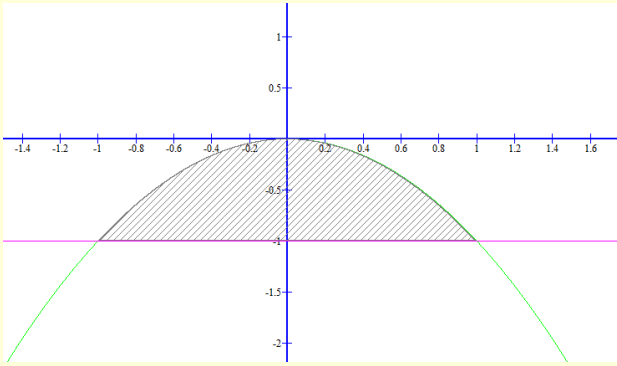
## 8. Malá písomka

- (0,2b)** Nakreslite elementárnu plochu danú krivkami  $y = -x^2$ ,  $y = -1$ .  
Určte typ elementárnej oblasti a napíšte jej hranice.
- (0,3b)** Nakreslite elementárnu plochu danú krivkami  $y = -2x + 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .  
Určte typ elementárnej oblasti a napíšte jej hranice.



## 8. Malá písomka

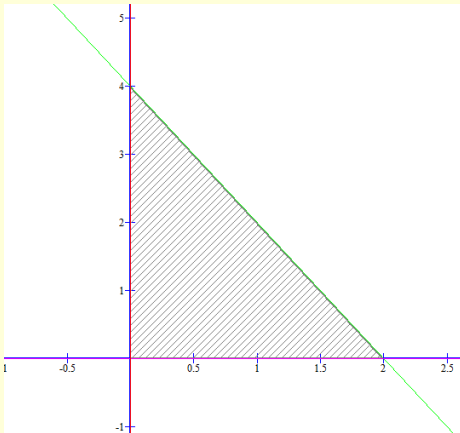
1. **(0,2b)** Nakreslite elementárnu plochu danú krivkami  $y = -x^2$ ,  $y = -1$ .  
Určte typ elementárnej oblasti a napíšte jej hranice.



typ  $[x, y]$

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1 \\ -1 &\leq y \leq -x^2 \end{aligned}$$

2. **(0,3b)** Nakreslite elementárnu plochu danú krivkami  $y = -2x + 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .  
Určte typ elementárnej oblasti a napíšte jej hranice.



typ  $[x, y]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq -2x + 4 \end{aligned}$$

typ  $[y, x]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 4 \\ 0 &\leq x \leq \frac{4-y}{2} \end{aligned}$$